

ГІПОТЕЗИ. НЕСТАНДАРТНІ МЕТОДИ РІШЕННЯ НАУКОВИХ ТА ІНЖЕНЕРНИХ ПРОБЛЕМ ПРИЛАДОБУДУВАННЯ

УДК 621.314

РОЗРАХУНОК ПОХИБКИ ІЗ ЗАДАНОЮ ДОВІРЧОЮ ЙМОВІРНІСТЮ

Майстренко В.М., Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», м. Київ, Україна

Знайдені формули для розрахунку спектра функції розподілу та другого енергетичного спектра похибки з заданою довірчою ймовірністю. Створені математичні моделі зв'язку випадкової похибки з довірчою ймовірністю на підставі моментів розподілу. Отримані формули для проведення інженерних розрахунків

Вступ

Для оцінки величини розкиду випадкових похибок відносно центру на практиці використовуються різні прийоми, котрі приводять до суттєво різних результатів. Частіше за все використовуються квантильна оцінка випадкових похибок [1]. При квантильній оцінці, виходячи з того, що площа, котра міститься під кривою щільності розподілу (функції розподілу) дорівнює одиниці, поділяється на частини вертикальними лініями, абсциси яких називають квантилями. Інтервал значень величини між квантилями є міжквантильним проміжком при довірчій ймовірності, що відповідає площі, обмеженій вертикальними лініями з абсцисами – квантилями. Отже, довірче значення випадкової похибки є її максимальним значенням з вказівкою довірчої ймовірності.

Але довірче значення випадкової похибки не може використовуватись при підсумовуванні похибок, тому що довірчий інтервал суми не дорівнює сумі довірчих інтервалів складових. Для того, щоб окремі складові похибки засобів вимірювання можна було підсумовувати розрахунками, вони повинні бути представлені своїми середньоквадратичними значеннями. При цьому можна розрахунковим шляхом не тільки складати будь-яку кількість складових похибок, що необхідно при аналізі точності непрямих вимірювань або складних вимірювальних пристроїв, але також обчислювати похибки, що необхідно при синтезі методів вимірювань або складних пристроїв із заданою результуючою похибкою.

Підсумовування середньоквадратичних відхилень потребує здійснення переходу від довірчого значення похибки до середнього квадратичного відхилення кожної складової похибки перед підсумовуванням і подальшого переходу до довірчого значення похибки після підсумовування. Такі переходи здійснюються за допомогою складних розрахунків, тим не менше підсумовування середніх квадратичних відхилень не забезпечує високої точності результату.

Постановка завдання

Випадкова похибка як будь-який випадковий процес має свої числові характеристики, однією з котрих є дисперсія. Отже, середнє квадратичне відхилення є також числовою характеристикою випадкового процесу. Числові характеристики випадкового процесу (моменти розподілу) дають про нього значно менше інформації, ніж функції розподілу [2]. Але у низці випадків це задовольняє. При визначенні сумарної похибки підсумовуванням середніх квадратичних відхилень складових похибки також втрачається частина інформації про поведінку окремих складових похибки. Тому для більш точної оцінки сумарної випадкової похибки потрібно використовувати не числові характеристики цього випадкового процесу, а іншу його характеристику — функцію розподілу, котра дає повну характеристику випадкового процесу [2]. В [3 – 6] запропоновано для оцінки випадкових процесів використовувати не тільки функцію розподілу, а її спектр Фур'є — спектр функції розподілу (СФР). Покажемо, що такий підхід дозволить врахувати особливості поведінки окремих складових випадкової похибки.

Квантильна оцінка випадкової похибки

При практичних розрахунках точними виразами для довірчого не завжди зручно користуватись через їх громіздкість. Тому СФР при квантильній оцінці випадкової похибки, а також другий енергетичний спектр можна розкласти в ряд Маклорена, обмежуючись п'ятьма членами ряду. Виходячи з структури СФР в такому вигляді [3]:

$$S_p(\omega) = m_0\{\xi\} - j\omega m_1\{\xi\} - \frac{\omega^2}{2} m_2\{\xi\} + j\frac{\omega^3}{6} m_3\{\xi\} + \frac{\omega^4}{24} m_4\{\xi\}, \quad (1)$$

де $m_n\{\xi\}$ – початкові моменти, $m_0\{\xi\} = P_d = \int_{-X}^X p(x)dx$ – довірна ймовірність, яка при $X = \infty$ дорівнює 1.

Розкладення в ряд Маклорена фактично зводиться до знаходження моментів функції розподілу різних порядків. Для СФР при квантильній оцінці випадкової похибки початковий момент n -го порядку

$$m_n\{\xi\} = \int_{-X}^X x^n p(x)dx.$$

Аналіз структури виразу (1) показує, що кожний член більш високого порядку від змінної $j\omega$ без постійного коефіцієнта є інтегралом від попереднього члена:

$$j\omega = \int d(j\omega); \quad -\frac{\omega^2}{2} = \int j\omega d(j\omega); \quad -j\frac{\omega^3}{6} = \int \left(-\frac{\omega^2}{2}\right) d(j\omega); \quad \frac{\omega^4}{24} = \int \left(-j\frac{\omega^3}{6}\right) d(j\omega);$$

На підставі теореми про інтегрування спектру [8] можна перейти до функції розподілу

$$\begin{aligned}
 p(x) &= \delta(x) - \frac{m_1\{\xi\}}{x} \delta(x) + \frac{m_2\{\xi\}}{x^2} \delta(x) - \frac{m_3\{\xi\}}{x^3} \delta(x) + \frac{m_4\{\xi\}}{x^4} \delta(x) = \\
 &= \delta(x) \left(1 - \frac{m_1\{\xi\}}{x} + \frac{m_2\{\xi\}}{x^2} - \frac{m_3\{\xi\}}{x^3} + \frac{m_4\{\xi\}}{x^4} \right). \tag{2}
 \end{aligned}$$

Зворотнє перетворення Фур'є від (1) дає можливість отримати (2) в іншому вигляді:

$$p(x) = \delta(x) - m_1\{\xi\} \frac{d\delta(x)}{dx} + \frac{m_2\{\xi\}}{2} \frac{d^2\delta(x)}{dx^2} - \frac{m_3\{\xi\}}{6} \frac{d^3\delta(x)}{dx^3} + \frac{m_4\{\xi\}}{24} \frac{d^4\delta(x)}{dx^4}. \tag{3}$$

Порівнюючи (2) та (3), отримаємо наступні співвідношення:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\delta(x)}{dx} &= \frac{\delta(x)}{x}; \quad \frac{d^2\delta(x)}{dx^2} = 2 \frac{\delta(x)}{x^2}; \quad \frac{d^3\delta(x)}{dx^3} = 6 \frac{\delta(x)}{x^3}; \\
 \frac{d^4\delta(x)}{dx^4} &= 24 \frac{\delta(x)}{x^4}; \quad \dots \quad \frac{d^n\delta(x)}{dx^n} = n! \frac{\delta(x)}{x^n}.
 \end{aligned}$$

Знайдемо довірчу ймовірність похибки X . Для цього обчислимо інтеграл в границях $-X$ до X від (2)

$$\begin{aligned}
 \int_{-X}^X p(x) dx &= \int_{-X}^X \delta(x) dx - m_1\{\xi\} \int_{-X}^X \frac{\delta(x)}{x} dx + m_2\{\xi\} \int_{-X}^X \frac{\delta(x)}{x^2} dx - \\
 &- m_3\{\xi\} \int_{-X}^X \frac{\delta(x)}{x^3} dx + m_4\{\xi\} \int_{-X}^X \frac{\delta(x)}{x^4} dx. \tag{4}
 \end{aligned}$$

Враховуючи те, що (1) лише приблизно апроксимує СФР при частотах, котрі знаходяться близько до нульової частоти, пряме рішення (4) призведе до дуже великої похибки визначення довірчої ймовірності через те, що стискання спектра імпульсу з метою підвищення точності вимірювання частоти неминуче супроводжується розтяганням сигналу в часі. Неможливість одночасно сконцентрувати сигнал в вузькій смузі частот та короткому інтервалі часу являє собою один з проявів у фізиці принципу невизначеності. Тому використаємо одну з можливих моделей імпульсу, площа котрого дорівнює одиниці [7]:

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}},$$

але при оптимальних значеннях параметра a , коли він є досить малим, та все ж не дорівнює нулю. Тоді

$$\delta(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}. \tag{5}$$

Підставивши (5) в (4), отримаємо:

$$P_d(a, X) = \int_{-X}^X p(x) dx = \left(1 - \frac{m_2\{\xi\}}{a^2} + \frac{m_4\{\xi\}}{3a^4} \right) \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{X}{a\sqrt{2}}\right) - \left[m_2\{\xi\} - \frac{m_4\{\xi\}}{3} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{X^2} \right) \right] \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{X^2}{2a^2}}}{aX}, \quad (6)$$

де $\operatorname{erf}\left(\frac{X}{a\sqrt{2}}\right) = \int_{-X}^X \frac{1}{\sqrt{2\pi}a} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx$ (7) – функція похибок (інтеграл ймовірності від $\frac{X}{a\sqrt{2}}$), причому, як відомо [7]

$$\lim_{a \rightarrow 0} \operatorname{erf}\left(\frac{X}{a\sqrt{2}}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1, \quad (8)$$

а (8) є першим членом (6). На рис. 1 та 2 приведені графіки зміни інтеграла ймовірностей (7) від параметрів a та X .

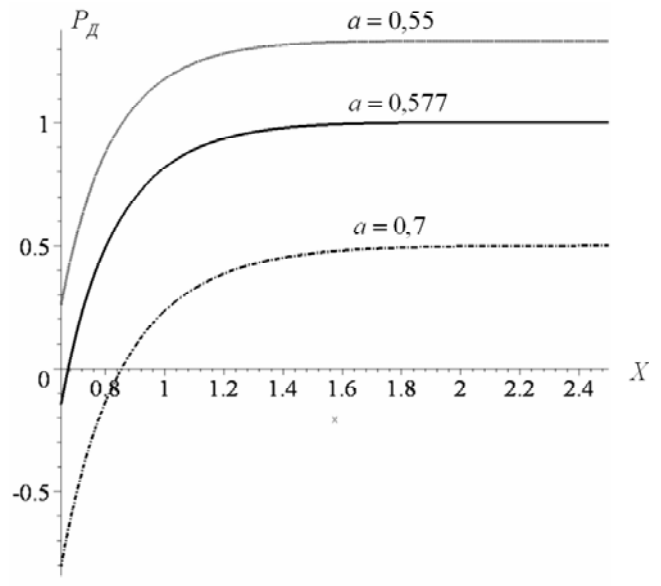
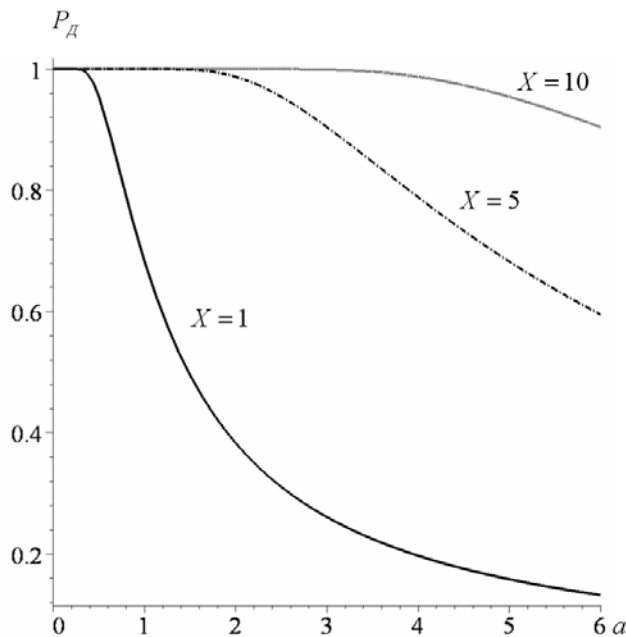


Рис. 1. Графік зміни інтеграла ймовірностей (19) від параметрів a та X .

Рис. 2. Графік зміни довірчої ймовірності (18) від параметрів a та X при $m_2\{\xi\} = m_4\{\xi\} = 1$.

Як бачимо, при дуже малих значеннях параметра a інтеграл ймовірності (7) не залежить від параметра X і дорівнює одиниці. А ця складова виразу довірчої ймовірності несе інформацію про довірчу ймовірність без квантильної оцінки, тобто повинна дорівнювати одиниці. Тому відхилення її значення від одиниці означає з'явлення похибки, обумовленої відхиленням параметра a від ну-

ля. На підставі залежності інтеграла ймовірностей від параметра a (рис. 1) можна зробити висновок, що для зменшення похибки довірчої ймовірності параметр a повинен бути обмеженим зверху і знизу, тобто мати оптимальне значення і знаходитись в діапазоні приблизно $0,55 - 0,7$.

Для встановлення оптимального значення параметра a вирішимо рівняння $P_d(a, X) = 1$, тобто прирівняємо (6) одиниці при $X = \infty$ відносно a . Рішення цього рівняння дає оптимальне значення $a = \sqrt{\frac{m_4\{\xi\}}{3m_2\{\xi\}}}$, котре при $m_2\{\xi\} = m_4\{\xi\} = 1$ приблизно дорівнює $0,577$.

Зрозуміло з виразу (6), що при квантильній оцінці похибки довіря ймовірність не залежить від непарних моментів розподілу, тобто при прийнятій апроксимації п'ятьма членами ряду Маклорена — від математичного сподівання і моменту третього порядку.

Підставивши отримане оптимальне значення параметра a в (6), отримаємо зв'язок довірчої ймовірності з граничною абсолютною похибкою X :

$$P_d(X) = \operatorname{erf}(X\sqrt{N}) - \frac{m_2\{\xi\}}{X^3\sqrt{\pi N}} \cdot e^{-NX^2}, \quad (9)$$

де $N = \frac{3m_2\{\xi\}}{2m_4\{\xi\}}$.

Отже при квантильній оцінці похибки довіря ймовірність повністю визначається парними моментами розподілу і не залежить від непарних.

В існуючих методиках оцінки похибок вимірювань, наприклад [1], для знаходження цього зв'язку використовують тільки момент другого порядку.

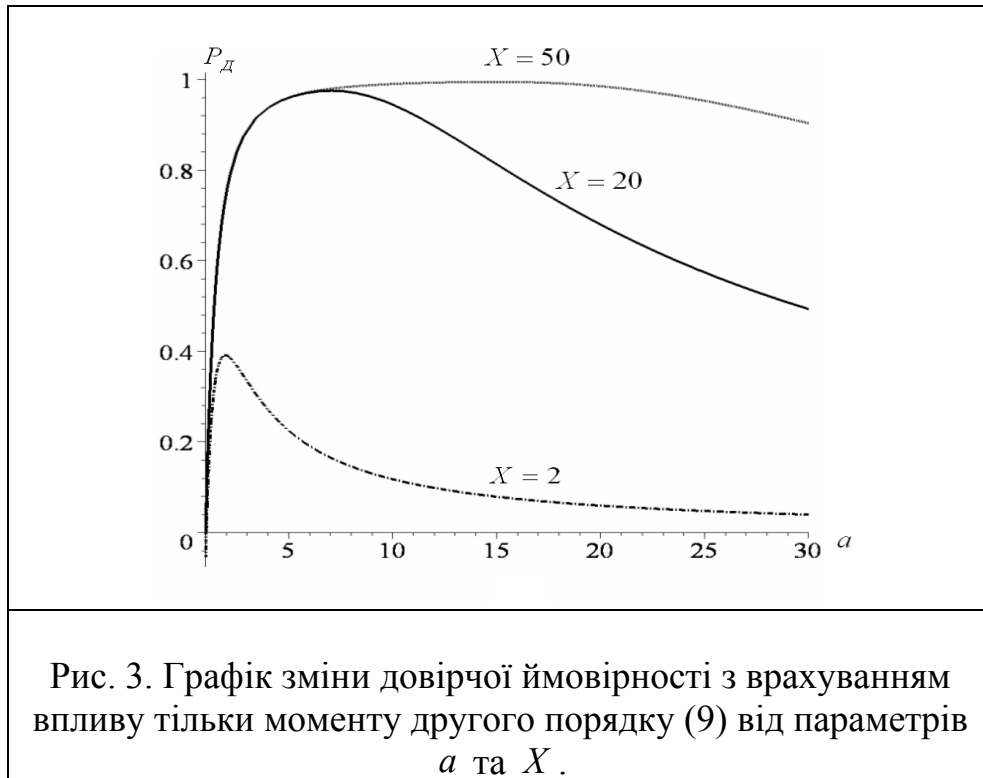
Тоді (6) спрощується:

$$P_d(a, X) = \left(1 - \frac{m_2\{\xi\}}{a^2}\right) \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{X}{a\sqrt{2}}\right) - m_2\{\xi\} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{X^2}{2a^2}}}{aX}. \quad (10)$$

Але при цьому похибка визначення зв'язку між параметрами зростає, тому що точність апроксимації спектра меншою кількістю членів ряду зменшується. Через це величина довірчої ймовірності не досягає одиниці, а оптимальне значення параметра a зростає (рис. 3).

Оцінимо довірку ймовірність на підставі СФР. Виходячи з [8] використаємо СФР, розкладений в ряд Маклорена (1). Але через те, що при інтегруванні в границях $\pm\infty$ окремі інтеграли можуть прагнути до ∞ , обмежимо границі інтегрування значенням $\pm\Omega$ і запишемо вираз в наступному вигляді:

$$\begin{aligned}
 S_{p_d}(\omega) = & \frac{1}{\pi} \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{\sin(\nu X)}{\nu} d\nu - j \frac{\omega m_1\{\xi\}}{\pi} \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{\sin(\nu X)}{\nu} (\omega - \nu) d\nu - \\
 & - \frac{\omega^2 m_2\{\xi\}}{2\pi} \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{\sin(\nu X)}{\nu} (\omega - \nu)^2 d\nu + j \frac{\omega^3 m_3\{\xi\}}{6\pi} \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{\sin(\nu X)}{\nu} (\omega - \nu)^3 d\nu + \\
 & + \frac{\omega^4 m_4\{\xi\}}{24\pi} \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{\sin(\nu X)}{\nu} (\omega - \nu)^4 d\nu.
 \end{aligned}$$



Як результат отримуємо вираз, де початкові моменти n -го порядку

$$m_n\{\xi\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) dx :$$

$$\begin{aligned}
 S_{pд}(\omega) = & \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \left(2 - j2\omega m_1\{\xi\} - \omega^2 m_2\{\xi\} + j\frac{\omega^3}{3} m_3\{\xi\} + \frac{\omega^4}{12} m_4\{\xi\} \right) \frac{\text{Si}(\Omega X)}{\pi} + \\
 & + \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \left\{ \frac{m_2\{\xi\}}{\pi X} \left[\Omega \cos(\Omega X) - \frac{\sin(\Omega X)}{X} \right] + \frac{m_4\{\xi\}}{\pi X} \left[\frac{\Omega}{X^2} \cos(\Omega X) - \frac{\sin(\Omega X)}{2X^3} + \right. \right. \\
 & + \left. \left. \frac{\Omega^2}{4X} \sin(\Omega X) - \frac{\Omega^3}{12} \cos(\Omega X) \right] \right\} + j\frac{\omega}{\pi X} m_3\{\xi\} \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin(\Omega X)}{X} - \Omega \cos(\Omega X) \right] + \\
 & + \frac{\omega^2}{\pi X} m_4\{\xi\} \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin(\Omega X)}{2X} - \Omega \cos(\Omega X) \right]. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Границя від першого члену виразу дає (13), тобто

$$\begin{aligned}
 S_{pд1}(\omega) = & \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \left(2 - j2\omega m_1\{\xi\} - \omega^2 m_2\{\xi\} + j\frac{\omega^3}{3} m_3\{\xi\} + \frac{\omega^4}{12} m_4\{\xi\} \right) \frac{\text{Si}(\Omega X)}{\pi} = \\
 = & 1 - j\omega m_1\{\xi\} - \frac{\omega^2}{2} m_2\{\xi\} + j\frac{\omega^3}{6} m_3\{\xi\} + \frac{\omega^4}{24} m_4\{\xi\}.
 \end{aligned}$$

Отже, при квантильній оцінці похибки СФР змінюється на величини, які виначаються другим, третім і четвертим членами (11). При цьому перший член є СФР при $P_d = 1$, другий – характеризує зміну цієї довірчої ймовірності при введенні квантильної оцінки похибки, третій – характеризує зміну математичного сподівання при введенні квантильної оцінки похибки, а четвертий — зміну дисперсії. При цьому зміна математичного сподівання, крім інтерквантильного проміжку, залежить від асиметрії функції розподілу, яка описується моментом розподілу $m_3\{\xi\}$, а зміна дисперсії – крім інтерквантильного проміжку залежить від протяжності розподілу, яка описується моментом розподілу $m_4\{\xi\}$. На зміну довірчої ймовірності, як видно з другого члену (11), впливають моменти розподілу $m_2\{\xi\}$ та $m_4\{\xi\}$.

Границі другого, третього та четвертого членів (11) прагнуть до ∞ , тому розрахувати ці вирази можна тільки приблизно. Для цього задамося таким значенням аргументу ΩX , при котрому $\cos(\Omega X) = 0$. Таких значень багато, але найменшим є $\Omega X = \frac{\pi}{2}$. При цьому $\sin(\Omega X) = 1$. Тоді другий член (11)

$$\begin{aligned}
 S_{pд2}(\omega) = & \frac{m_2\{\xi\}}{\pi X} \left[\Omega \cos(\Omega X) - \frac{\sin(\Omega X)}{X} \right] + \frac{m_4\{\xi\}}{\pi X} \left[\frac{\Omega}{X^2} \cos(\Omega X) - \right. \\
 & \left. - \frac{\sin(\Omega X)}{2X^3} + \frac{\Omega^2}{4X} \sin(\Omega X) - \frac{\Omega^3}{12} \cos(\Omega X) \right] = -\frac{m_2\{\xi\}}{\pi X^2} + \frac{m_4\{\xi\}}{2X^4} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{\pi} \right), \quad (12)
 \end{aligned}$$

третій член

$$S_{pд3}(\omega) = j\omega \frac{2m_3\{\xi\}}{\pi X^2}, \quad (13)$$

і четвертий член

$$S_{pд4}(\omega) = \omega^2 \frac{m_3\{\xi\}}{2\pi X^2}, \quad (14)$$

Отже оцінка зміни довірчої ймовірності на підставі СФР підтверджує отриманий раніше іншим способом висновок про те, що при квантильній оцінці похибки довірча ймовірність не залежить від непарних моментів розподілу (12). При цьому змінюються математичне сподівання (13) і момент другого порядку (14), а величина цієї зміни крім інтерквантильного проміжку залежить тільки від початкового моменту третього порядку.

Таким чином довірча ймовірність

$$P_d(X) = 1 - \frac{m_2\{\xi\}}{\pi X^2} + \frac{m_4\{\xi\}}{2X^4} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{\pi} \right), \quad (15)$$

довірче математичне сподівання (математичне сподівання при довірчій ймовірності P_d)

$$m_{1д}\{\xi\} = m_1\{\xi\} - \frac{2m_3\{\xi\}}{\pi X^2}, \quad (16)$$

причому зміна математичного сподівання обумовлена внесенням систематичної похибки, що виникає через наявність випадкової похибки:

$$\Delta_c = -\frac{2m_3\{\xi\}}{\pi X^2},$$

довірчий початковий момент другого порядку (момент при довірчій ймовірності P_d)

$$m_{2д}\{\xi\} = m_2\{\xi\} - \frac{m_3\{\xi\}}{2\pi X^2}. \quad (17)$$

При нульовому математичному сподіванні також вноситься систематична похибка з знаком мінус:

$$\Delta_c = -\frac{2M_3\{\xi\}}{\pi X^2},$$

де $M_3\{\xi\}$ – центральний момент третього порядку, змінюється дисперсія:

$$D_d = D - \frac{M_3\{\xi\}}{2\pi X^2}, \quad (18)$$

де D – дисперсія при довірчій ймовірності $P_d = 1$, а довірча ймовірність

$$P_d(X) = 1 - \frac{D}{\pi X^2} + \frac{M_4\{\xi\}}{2X^4} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{\pi} \right), \quad (19)$$

де $M_4\{\xi\}$ – центральний момент четвертого порядку.

Як відомо [1], вважається, що випадкова похибка розподіляється симетрично, тому в СФР випадкової похибки непарні моменти відсутні і систематичні

похибки під дією випадкових частіше за все не виникають.

З структури (6) та (15) можна зробити висновок про те, що збільшення моменту другого порядку зменшує довірчу ймовірність, а збільшення моменту четвертого порядку навпаки її збільшує, тобто компенсує вплив моменту другого порядку.

Отже, порівнюючи результати, отримані при різних математичних моделях процесів, можна зробити висновок, що вирази, отримані на підставі аналізу СФР, є більш простими і тому більш зручними для розрахунків. На рис. 4 для порівняння показані залежності довірчої ймовірності P_d від випадкової похибки X при $m_2\{\xi\} = m_4\{\xi\} = 1$. Як видно з рис. 4 кожна з математичних моделей дає свою похибку, тому криві 1 та 2 не співпадають. Але відхилення цих кривих є невеликим, тому похибка є допустимою.

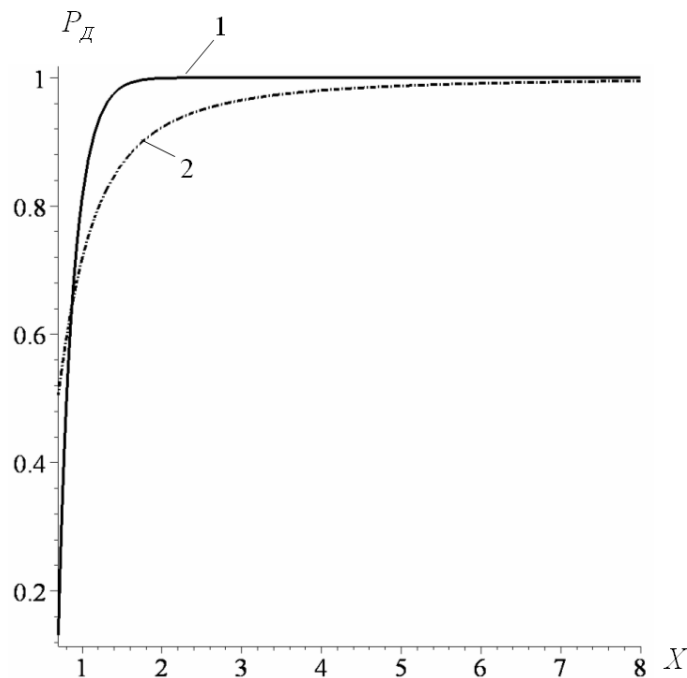


Рис. 4. Залежність довірчої ймовірності від випадкової похибки X при $m_2\{\xi\} = m_4\{\xi\} = 1$ виходячи з виразів для функції розподілу (9) та СФР (15)

Звичайно при розрахунках похибок задаються довірчою ймовірністю і по її величині знаходять випадкову похибку. Тому рівняння (9) та (15) бажано мати у вигляді залежності випадкової похибки X від довірчої ймовірності. Але для (9) це зробити важко. Виходячи з (19) з урахуванням неможливості існування комплексної похибки випадкова похибка:

$$X = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2D + \sqrt{4D^2 - \pi \cdot M_4\{\xi\}(\pi^2 - 8)(1 - P_d)}}{\pi(1 - P_d)}}, \quad (20)$$

а при врахуванні тільки другого моменту, тобто $M_4\{\xi\} = 0$

$$X = \sqrt{\frac{D}{\pi(1-P_d)}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi(1-P_d)}}, \quad (21)$$

де σ – середньоквадратичне відхилення.

В [1] приводяться співвідношення, аналогічні (21), в яких зв'язок між похибкою X та середнім квадратичним відхиленням σ визначається постійним коефіцієнтом, який залежить від довірчої ймовірності. Так для $P_d = 0,9$ цей коефіцієнт дорівнює 1,6. Підставивши це значення довірчої ймовірності в (21) отримуємо значення коефіцієнта 1,784, що є близьким, але трошки більшим. Проте з врахуванням впливу моменту четвертого порядку (вираз (20)) похибка X зменшується і наближається до значення, що приводиться в [1].

При бажанні використати першу математичну модель доведеться користуватися безпосередньо виразом (9).

Отримані результати також показують, що рекомендовані в літературі, наприклад [1], методи оцінки випадкових похибок з довільним значенням довірчої ймовірності, є дуже неточними, бо не враховують зміни моментів розподілу в результаті квантильної оцінки похибок, а також не враховують особливостей поведінки дисперсій при підсумовуванні похибок [9].

Використовуючи вирази (15-21) можна проводити розрахунки зі значно більшою точністю.

Висновки

Квантильна оцінка похибки може здійснюватись за допомогою спектра функції розподілу.

Похідною n -го порядку від функції Дірака є $\frac{d^n \delta(x)}{dx^n} = n! \frac{\delta(x)}{x^n}$.

За допомогою спектра функції розподілу зручно встановити зв'язок між довірчою ймовірністю, моментом розподілу та інтерквантильним проміжком.

Вирази для оцінки зв'язку довірчої ймовірності та інтерквантильного проміжку (подвоєної випадкової похибки) є більш простими і тому більш зручними для розрахунків.

Довірча ймовірність при визначенні її зв'язку з інтерквантильним проміжком не залежить від значень непарних моментів розподілу і визначається тільки значеннями парних моментів розподілу. При збільшенні моменту другого порядку вона зменшується, а при збільшенні моменту четвертого порядку – зменшується.

Зміна інтерквантильного проміжку призводить до зміни моментів розподілу. Ця зміна обумовлена моментами розподілу, котрі характеризують асиметрію розподілу (при оцінці законів розподілу за допомогою чотирьох моментів – третім моментом). Якщо третій момент розподілу дорівнює нулю, тобто розподіл є симетричним, зміна інтерквантильного проміжку не змінює моменти роз-

поділу. Якщо третій момент розподілу відрізняється від нуля, змінюється перший та другий моменти розподілу.

При зміні інтерквантильного проміжку зміна математичного сподівання (систематичної похибки) в 4 рази більше ніж зміна моменту другого порядку. При зростанні інтерквантильного проміжку вказані моменти зменшуються, а при нульовому математичному сподіванні з'являється тільки систематична похибка.

Прийняті в спеціальній літературі методи оцінки випадкових похибок з довільним значенням довірчої ймовірності є дуже неточними, бо не враховують зміни моментів розподілу в результаті квантильної оцінки похибок, а також не враховують особливостей поведінки дисперсій при підсумовуванні похибок.

Література

1. Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений. – Л.: Энергоатомиздат, 1991. – 302 с.
2. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: Советское радио, 1974. – 549 с.
3. Майстренко В.М. Спектри одномірних функцій розподілу випадкових процесів // Вісник НТУУ «КПІ». Серія Приладобудування – 2003. – № 26. – С. 145–150.
4. Майстренко В.М. Дослідження спектрів одномірних функцій розподілу випадкових процесів // Третя науково-технічна конференція «Приладобудування – 2004: Стан і перспективи», 20 – 21 квітня 2004 р., м. Київ, Україна, Збірка наукових праць – С. 137–138.
5. Майстренко В.М. Дослідження спектрів одномірних функцій розподілу випадкових процесів // Вісник НТУУ «КПІ». Серія Приладобудування. – 2004. – № 27. – С. 163–170.
6. Майстренко В.М. Спектри двомірних функцій розподілу випадкових процесів // Вісник Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». Серія Приладобудування. – 2005. – № 29. – С. 160–168.
7. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Советское радио, 1971. – 671 с.
8. Майстренко В.М. Спектр функції розподілу при квантильній оцінці випадкової похибки // Вісник НТУУ «КПІ». Серія Приладобудування. – 2008. – № 35. – С. 160–165.
9. Майстренко В.М. Підсумовування випадкових похибок вимірювань // Вісник НТУУ «КПІ». Серія Приладобудування. – 2007. – № 34. – С. 161–167.

<p>Майстренко В.Н. Расчет погрешности с заданной доверительной вероятностью Найдены формулы для расчета спектра функции распределения и второго энергетического спектра погрешности с заданной доверительной вероятностью. Созданы математические модели связи случайной погрешности с доверительной вероятностью на основании моментов распределения. Получены формулы для проведения инженерных расчетов.</p>	<p>Maystrenko V.N. Account of an error with the given confidential probability The formulas for account of a spectrum of function of distribution and second power spectrum of an error with the given confidential probability are found. The mathematical models of communication connection) of a casual error with confidential probability are created on the basis of the moments of distribution. The formulas for realization of engineering accounts are received.</p>
--	--

*Надійшла до редакції
22 квітня 2008 року*

УДК 621.317.

МЕТОД КОНТРОЛЯ КОМПОНЕНТНОГО СОСТАВА ГАЗОВЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СРЕД

¹⁾Богорад Ю.Г., ²⁾Кокаровцев В.В., ²⁾Троц А.А., ¹⁾ГНИИ МВД Украины, г. Киев, Украина,
²⁾Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», г. Киев, Украина

Приведены основные положения метода контроля компонентного состава газовых технологических сред на основании разработанной теории возникновения энергетической избыточности и ее развития при стремлении до уровня среды. Рассмотрена теоретическая необходимость введения прогрессирующего пространства как основного при изложении теории метода

Введение

В теории и практике многокомпонентного газового анализа одной из основных задач при создании математической модели процесса является адекватное отображение реального процесса взаимодействия отдельных компонентов в единой термодинамической системе с целью наиболее полного описания отдельного технологического процесса в рамках заданной точности и максимальной автоматизации процесса контроля. Для решения поставленной задачи наиболее целесообразно использование общезначимых методов, так как процесс образования оптимальной технологической среды связан с комплексом технических средств контроля. Средства контроля информативно базируются на преобразовании энергии разнообразных физических эффектов и явлений в определённый информативный сигнал, требующий дополнительной автоматизированной обработки для обеспечения контрольно-регулирующего воздействия на объект регулирования. Этим условиям удовлетворяют методы контроля, обеспечивающие заданную точность измерения параметра и позволяющие воздействовать на объект регулирования заданными техническими средствами при условии сохранения заданной точности.

Постановка задачи

В практике газового анализа, особенно многокомпонентного газового анализа, реализуются методы анализа и в дальнейшем контроля, основанные на теории газовой динамики и в особых случаях газовой термодинамики [1, 2]. Однако, такие методы носят общий характер и требуют для каждого конкретного случая практического газового анализа введения различных, эмпирически определенных, коэффициентов и упрощений. Так, например, заданная точность контроля определяется степенью учета случайных воздействий на объект регулирования, зависящей от адекватности конкретной математической модели процесса регулирования.

Предложенная математическая модель базируется на определении минимального регулирующего воздействия, основанного на информативных воз-

можностях используемого технического обеспечения каждого конкретного процесса контроля.

Цель работы – создание оптимального алгоритма контроля компонентного состава газовой технологической среды тепловых агрегатов на основе предложенного метода контроля многокомпонентных газовых технологических сред, основанного на структурном построении взаимосвязей системы ОИ-ИС-ОИ, как целостного объекта контроля, на основании разработанной теории возникновения энергетической избыточности [5, 6, 7] и ее развития при стремлении до уровня среды.

Алгоритм контроля компонентного состава газовой технологической системы тепловых агрегатов

Методы контроля многокомпонентных газовых технологических сред обуславливают:

- разработку новых или использование существующих научных подходов, объясняющих физику процессов, происходящих в объекте измерения (ОИ), с четким описанием эффектов, позволяющих получать достоверную информативность о происходящих процессах, и степень их контролируемости [3];

- определение комплексов информативных параметров, которые четко определяют состояние ОИ на базе физических, физико-химических и других используемых эффектов, которые имеют место в процессах контролируемого ОИ и позволяют определять необходимое достоверное поле (объем) информативных параметров [4];

- построение наиболее близкой по сути математической модели определения состояния ОИ в процессе постоянного контроля и методики регулирования состояния ОИ как части комплекса математической модели [1];

- подбор существующих и разработка новых необходимых первичных преобразователей, определенного ранее комплекса информативных сигналов, для построения измерительной цепи в рамках построенной математической модели системы регулирования [2, 4].

Разработка метода контроля объекта технологической среды основана на выполнении комплекса необходимых задач:

- формировании понятия системы “объект измерения - измерительная система - объект измерения” (ОИ-ИС-ОИ), тождественной структуре локальной пространственно-энергетической целостной ячейки энергетически связанных физических объектов ОИ;

- исследовании динамики энергетического состояния ОИ и определении условий образования целостной структурной ячейки, обладающей максимальной энергией энергетически связанных физических объектов ОИ, которая определяет суть системы ОИ-ИС-ОИ;

– определении динамики поведения элементарной материальной частицы системы ОИ-ИС-ОИ, которая имеет максимальный запас энергии, при изменении своей энергии в диапазоне всех возможных для системы ОИ-ИС-ОИ уровней энергии, то есть своего структурного распада – рекомбинации;

– исследовании динамики всех измерительных параметров ИС в процессе структурного распада-рекомбинации элементарной материальной частицы системы ОИ-ИС-ОИ с целью определения измерительной структуры ИС на базе типов выбранных измерительных преобразователей;

– формировании блок-схемы системы ОИ-ИС-ОИ и определении математической модели контроля выбранной системы ОИ-ИС-ОИ.

Таким образом, алгоритм контроля по методу имеет следующий вид.

1. ОИ воздействует на ИС путем, например, трех устойчивых информативных сигналов x, y, z , которые формируют отклик ИС в виде трех измерительных сигналов m, n, v .

2. Если измерительные сигналы m, n, v не коррелированы (на этот вопрос отвечает ИС), то максимальная комбинация состояний трех устойчивых значений m, n, v в разнообразных вариантах, которая отражает энергетические затраты ИС, в соответствии со строгими математическими выкладками будет равна: [5]

$$N_{\max} = e^{m^{n^v}},$$

при условии, что $m > n > v$. Обработка этой зависимости представляет собой сложное задание;

3. Для упрощения обработки зависимости полученных измерительных сигналов ИС рекомендуется путь перехода в следующее вычислительное поле: [6]

$$e^{m^{n^v}} = e \cdot m^* \cdot n^* \cdot v^*,$$

где m^*, n^*, v^* отвечают значениям, полученным по функции перехода $\Omega(m, n, v)$;

4. Дальнейший анализ сводится к раскрытию в динамическую квадратичную форму [7]

$$F^{(n)} \cdot f^{(n)} + \dots + F^{(i)} \cdot f^{(i)} + \dots + f = Q^{(n)} \cdot g^{(n)} \cdot t^n,$$

где $F^{(i)}$ - первообразные функций измерительных сигналов для $i = 1, n$; $f^{(i)}$ - производные функций измерительных сигналов для $i = 1, n$; $Q^{(n)}$ - n -нна первообразная функций информативного параметра g ; $g^{(n)}$ - n -нна производная функций информативного параметра g ; t - время.

Очевидно, что квадратичная форма описывает динамическое изменение энергетического поведения ИС в процессе замеров x, y, z и формирования m, n, v .

5. Другим вариантом п.4. есть запись динамического дифференциального уравнения ИС [7]

$$K_n \cdot f^{(n)} + \dots + K_i \cdot f^{(i)} + \dots + K_0 \cdot f = g^{(n)} \cdot t^n$$

Это уравнение отображает полную динамику поведения ИС в процессе контроля $F^{(i)}, K_i, g^{(n)}$, которые определяются алгоритмами расчетов;

6. Дальнейший анализ п.4. и п.5 остается сложным заданием. Упростить решение уравнений п.4. и п.5 возможно путем использования соответствующих методик: операторы Лапласа, Фурье и т.п.; методы приближенных расчетов. В статье предложена экспоненциальная аппроксимация уравнений п.4. и п.5. по производных для получения [5]

$$e \cdot \sum_{i=0}^i \frac{t^i}{i!} K_i = g^{(n)} \cdot t^n$$

7. После получения полной информации о поведении ИС в процессе контроля формируется алгоритм обработки измерения ИС на основании уравнений п.4 и п.5, который и образует основу метода контроля и структуры соответствующей ИС.

8. Определяем для уравнений п.4 и п.5 функции $\Gamma(g), \Gamma(p)$ состояния анализируемого объекта и сравниваем их с целью определения типа системы ОИ-ИС-ОИ: [8]

- система закрыта (система типа ОИ-ИС-ОИ) - $\Gamma(p) = \Gamma(g)$, ;
- система открыта (система типа ОИ-ИС) - $\Gamma(p) = \Gamma(g) + \Delta\Gamma$.

9. С помощью разработанного матричного алгоритма определяем параметры x^*, y^*, z^* адекватного пространства динамической измерительной системы ОИ-ИС-ОИ [5].

10. Используя обратный оператор перехода определяем измеренное EN_{\max}^* процесса, который контролируется [5]

$$EN_{\max}^* = e^{x^* y^* z^*}$$

11. Определяем статическую $\delta_{\text{ст}} [2]$ и динамическую точность контроля как

$$\delta_{\text{ди}} = t_{\text{переходного}}^* = a \cdot t_{\text{переходного}}^*$$

и оцениваем степень соответствия метрологических характеристик заданным.

Выводы

Метод контроля позволяет описать компонентный состав газовой технологической среды на основе описания комплекса энергетических состояний технологической среды в единой системе контроля ее параметров, что позволяет осуществлять контрольно-регулирующее воздействие на объект регулирования с заданной точностью.

Дальнейшие исследования обусловлены необходимостью сочетания существующих подходов описания различных физических процессов для обеспечения возможности анализа ОИ единым приборным комплексом.

Литература

1. Таланчук П.М., Рущенко В.Т. Основы теории проектирования измерительных приборов: Учеб.пособие. – К.: Выща школа., 1989. – 454 с.
2. Конюхов А.Г. Метрологическое обеспечение в приборостроении. Аспекты управления. – М.: Изд-во стандартов, 1990. – 208 с.
3. Методы синтеза нелинейных систем автоматического управления. Под ред. С.М. Федорова. – М.: Наука, 1986. – 210 с.
4. Засоби вимірювання автоматичного зрівноваження: Навч. посібник. За ред. П.М. Таланчука. – К.: Либідь, 1994. – 288 с.
5. Троц А.А. Основы математического опису теорії Дірака-Реаліума. – Київ: НТУУ «КПІ», 1995. – 38 с.
6. Кокаровцев В.В., Троц А.А. Фізичні аспекти теорії Дірака-Реаліума. – Київ: НТУУ «КПІ», 1995. – 50 с.
7. Таланчук П.М., Остаф'єв В.О., Троц А.А., Махмудов К.Г., Мірзаєв А.А., Глушенко Ю.Б. Диференційне рівняння причина-наслідки зв'язків. // Вісник НТУУ «КПІ». Приладобудування. – 1995. – № 25. – С. 3–19.
8. Троц А.А., Буряк В.Г., Глушенко Ю.Б. Причинно-наслідкові аспекти проектування оснастки. Перспективні технології, оснастка і методологія підготовки виробництва. Науковий технічний збірник / Під ред. проф. Румбешти В.О., Глоби А.В. – К.: ТОВ “Міжнар.фін. агенство”, 1997. – С. 64–66.
9. Дружинин В.В., Кондоров Д.С. Системотехника. – М.: Радио и связь, 1985. – 200 с.
10. Розенталь И.Л. Элементарные частицы и структура Вселенной. - М.: Наука, 1984. – 112 с.
11. Бояринов В.А., Рущенко В.Т. Синтез математической модели средств измерений индуктивным методом самоорганизации на ЭВМ // Вісник НТУУ «КПІ». Приладобудування. – 1985. – № 15. – С. 37.

<p>Богорад Ю.Г., Кокаровцев В.В., Троц А.А. Метод контролю компонентного складу газових технологічних середовищ Приведено основні положення методу контролю технологічних середовищ на основі розробленої теорії виникнення енергетичної надлишковості і її розвитку при стремлінні до рівня середовища. Розглянута теоретична необхідність введення прогресуючого простору як основного при викладенні теорії методу.</p>	<p>Bogorad Y.G., Kokarovtsev V.V., Trots A.A. Quality monitoring of componental structure of gas technological environments Main provisions of a monitoring method of technological environments are resulted on the basis of the developed theory of occurrence of power redundancy and its development at aspiration up to a level of environment. Theoretical necessity of introduction of progressing space as the basic one is considered at a statement of the theory of the method.</p>
---	---

*Надійшло до редакції
18 червня 2008 року*