

**НАУКОВІ ТА ПРАКТИЧНІ ПРОБЛЕМИ ВИРОБНИЦТВА
ПРИЛАДІВ ТА СИСТЕМ**

УДК 534.1

**ПОБУДОВА ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ ПРУЖНИХ ЕЛЕМЕНТІВ
ТЕНЗОРЕЗИСТИВНИХ ВИМІРЮВАЧІВ ЗМІННОГО ТИСКУ. ЧАСТИНА I**

Тихан М.О., Національний університет “Львівська політехніка”, м. Львів, Україна

Побудовані динамічні моделі так званих вторинних пружних елементів тензометричних вимірювачів змінного тиску у формі інтегральних рівнянь Вольтерра, що дозволяє найбільш ефективно аналізувати динаміку цих елементів при довільній формі вхідного сигналу

Вступ

Численні системи автоматичного керування потребують високоточних вимірювачів змінного тиску, які можуть працювати за умов високих і нестационарних температур у вимірюваному середовищі. Такі задачі виникають у аерокосмічній галузі, при відпрацюванні силових і енергетичних установок, наукових дослідженнях тощо [1-3].

На сьогодні, з метою зменшення температурної залежності результатів вимірювання тиску в умовах істотних термовпливів розроблена низка спеціальних заходів – так званих методів термокомпенсації [4-6]. Серед фізико-конструктивних методів термокомпенсації досить ефективним є такий, при якому тензорезистивні перетворювачі намагаються “ізолювати” від зони найбільшого впливу температури. Найчастіше це здійснюють або шляхом примусового охолодження внутрішньої порожнини вимірювача, або використовуючи спеціальні заповнювачі між первинною і вторинною мембранами.

Вимірювачі, реалізовані за другим принципом, слабо придатні при вимірюванні швидкозмінного тиску і мають складну термомеханіку при нестационарному термовпливі.

Особливістю вимірювачів з примусовим охолодженням є те, що для покращення його ефективності можуть використовуватися так звані вторинні пружні елементи, що спряжені з первинною мембраною.

Очевидно, що для раціонального проектування таких вимірювачів, причому орієнтованих на вимірювання змінного тиску, доцільно мати інженерно зручні математичні залежності, що описують динаміку пружних елементів.

Динамічні моделі вторинних пружних елементів

Типовими вторинними пружними елементами, що використовуються при проектуванні вимірювачів змінного тиску є мембрани, двоопорні і консольні балки, а також стержні і кільця [7-13]. Існують вторинні елементи більш складної конфігурації, проте їхнє використання для вимірювачів швидкозмінного тиску є недоцільним.

У таких конструкціях вимірювачів динаміка вторинного елемента матиме дві складові: переносну - деформація вторинного елемента, яка синфазна з деформацією первинної мембрани і відносну, або власну складову - коливання, що є наслідком дії інерційних сил у переносному русі.

Відомо [14], що динаміка первинної круглої мембрани, котра спряжена з вторинним пружним елементом описується інтегральним рівнянням

$$w(r,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(k_n r) \cdot \frac{\tilde{\xi}_n}{\tilde{\eta}_n} \int_0^t p(\tau) \cdot e^{-\beta(t-\tau)} \cdot \sin(\tilde{\eta}_n(t-\tau)) d\tau \quad (1)$$

де $w(r,t)$ - прогин мембрани в точці з координатою r від дії вимірюваного тиску $p(t)$,

$$\Phi_n(k_n r) = J_0(k_n r) \cdot I_0(\mu_n) - J_0(\mu_n) \cdot I_0(k_n r) \quad (2)$$

- власна функція відповідної межевої задачі, а μ_n - власні значення цієї функції,

$k_n = \frac{\mu_n}{R}$, R - радіус мембрани, $J_i(k_n \cdot r)$ і $I_i(k_n \cdot r)$ - функції Бесселя,

$$\tilde{\xi}_n = \frac{J_1(\mu_n) \cdot I_0(\mu_n) - J_0(\mu_n) \cdot I_1(\mu_n)}{\mu_n \cdot \gamma \cdot J_0^2(\mu_n) \cdot I_0^2(\mu_n)} \quad (3)$$

$\gamma = h\rho$ - питома вага одиниці площі мембрани,

$$\tilde{\eta}_n = \sqrt{\tilde{\xi}_n^2 - \beta^2} \quad (4)$$

- власна частота коливань мембрани з врахуванням згасання коливань, а

$$\tilde{\xi}_n^2 = c^4 \cdot \frac{\mu_n^4}{R^2} + \frac{\chi^2 \cdot ((I_0(\mu_n) - J_0(\mu_n))^2)}{2\pi\gamma R^2 \cdot J_0^2(\mu_n) \cdot I_0^2(\mu_n)} \quad (5)$$

- власна частота коливань мембрани без врахування згасання коливань, β - коефіцієнт демпфування, $c^4 = \frac{D}{\gamma} = \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)\rho}$, D - циліндрична жорсткість мембрани, E - модуль пружності, h і ρ - товщина мембрани і густина її матеріалу, ν - коефіцієнт Пуассона, χ^2 - жорсткість вторинного пружного елемента.

2.1. Динаміка вторинного пружного елемента у формі круглої мембрани

У вимірювачів з вторинним пружним елементом у формі круглої мембрани, та спряжена з первинною за посередництвом жорсткого штока, що розташований в її центрі (рис.1).

Тому при коливанні первинної мембрани деформація вторинної мембрани становитиме

$$w_2(t,r) = w_n(t,r) + w_g(t,r) \quad (6)$$

де $w_n(t,r)$ - переносна складова, що синфазна з деформацією первинної мембрани, $w_g(t,r)$ - відносна (власна) деформація (рис.2).

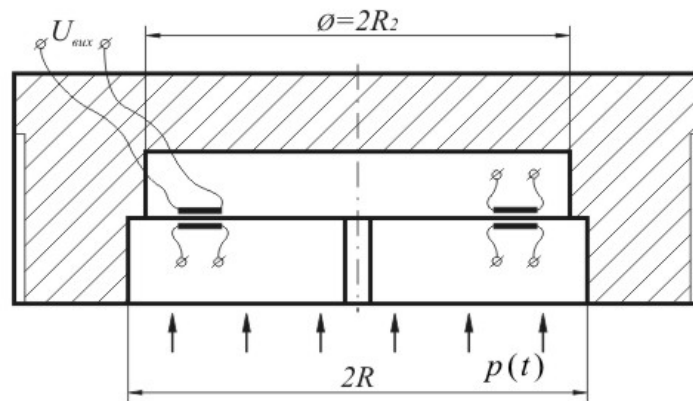


Рис.1. Тензорезистивний вимірювач змінного тиску з вторинним пружним елементом у формі круглої мембрани

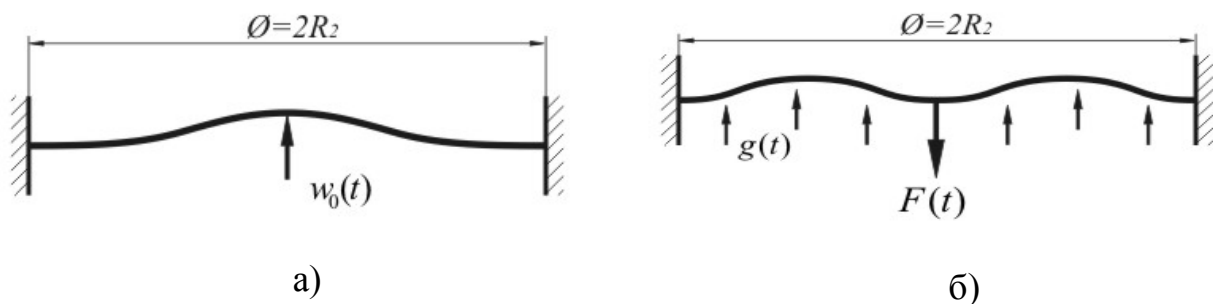


Рис.2. Схеми деформацій вторинної мембрани, де: а) переносна складова деформації; б) відносна (власна) деформація

Переносна складова деформації є синфазна з деформацією первинної мембрани і складає

$$w_n(t, r) = \frac{2w_0(t)}{R_2^2} \left(r^2 \ln \frac{r}{R_2} + \frac{R_2^2 - r^2}{2} \right)$$

де $w_0(t)$ - прогин центра вторинної мембрани, що співпадає з прогином центра первинної мембрани, R_2 - радіус вторинної мембрани.

Враховуючи (1) маємо

$$w_n(t, r) = \frac{2}{R_2^2} \left(r^2 \ln \frac{r}{R_2} + \frac{R_2^2 - r^2}{2} \right) \times \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(0) \cdot \frac{\tilde{\zeta}_n}{\tilde{\eta}_n} \int_0^t p(\tau) \cdot e^{-\beta(t-\tau)} \sin(\tilde{\eta}_n(t-\tau)) d\tau \quad (7)$$

Власна складова для вторинного пружного елемента у вигляді мембрани опишеться рівнянням

$$c^4 \Delta \Delta w_e(r, t) + \frac{\partial^2 w_e(r, t)}{\partial t^2} + 2\beta_2 \frac{\partial w_e(r, t)}{\partial t} = \frac{g(t)}{\gamma} - \frac{F(t)}{\gamma} \cdot \frac{\delta(r)}{2\pi r} \quad (8)$$

де $\delta(r)$ - функція Дірака, а

$$g(t) = \frac{m \cdot \ddot{w}_0(t)}{S} = \gamma \cdot \ddot{w}_0(t) \quad (9)$$

сила, яка розподілена на всю площу S вторинної мембрани і є інерційною силою, що діє на вторинний пружний елемент масою m при його переносному русі; $F(t)$ - сила, що діє в центрі вторинної мембрани з боку штока, оскільки при відносних коливаннях центр вторинної мембрани відносно штока нерухомий, β_2 - коефіцієнт демпфування коливань вторинної мембрани.

У такому випадку така сила повинна дорівнювати

$$F(t) = \frac{g(t) \cdot R_2^2}{4} \quad (10)$$

Розв'язок (8) також шукаємо у вигляді

$$w_2(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(r) \cdot T_n(t) \quad (11)$$

при межових і початкових умовах

$$w(r, t) = \frac{\partial w(r, t)}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = R \quad (12)$$

$$w(r, t) = \frac{\partial w(r, t)}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t = 0 \quad (13)$$

Функцію $\Phi_n(r)$ беремо у вигляді (2).

Підставляючи (2) в (11) і далі в (8), отримуємо

$$\begin{aligned} c^4 \cdot k_n^4 \cdot \Phi_n(k_n \cdot r) \cdot T_n(t) + \Phi_n(k_n \cdot r) \cdot T_n''(t) + 2\beta_2 \cdot \Phi_n(k_n \cdot r) \cdot T_n'(t) = \\ = \frac{g(t)}{\gamma} - \frac{F(t)}{\gamma} \cdot \frac{\delta(r)}{2\pi r} \end{aligned} \quad (14)$$

Як відомо функція (2) на відрізку $(0, R)$ є ортогональною з вагою r , тобто

$$\int_0^R r \cdot \Phi_n(k_n \cdot r) \cdot \Phi_m(k_m \cdot r) = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n \\ R^2 \cdot J_0^2(\mu_n) \cdot I_0^2(\mu_n) & \text{при } m = n \end{cases} \quad (15)$$

Помноживши (14) на $r \cdot \Phi_m(k_m \cdot r)$ та інтегруючи від 0 до R з урахуванням ортогональності (2) і залежностей

$$\int_0^R r \cdot J_0(k_n \cdot r) dr = \frac{R^2 \cdot J_1(\mu_n)}{\mu_n} \quad (16)$$

$$\int_0^R r \cdot I_0(k_n \cdot r) dr = \frac{R^2 \cdot I_1(\mu_n)}{\mu_n} \quad (17)$$

$$\int_0^R \delta(r) \cdot f(r) dr = f(0) \quad (18)$$

де $f(r)$ – деяка функція, маємо

$$R_2^2 J_0^2(\mu_n) \cdot I_0^2(\mu_n) \cdot \left[c^4 \cdot \frac{\mu_n^4}{R_2^4} \cdot T_n(t) + T_n''(t) + 2\beta_2 \cdot T_n'(t) \right] = \\ = \frac{g(t) \cdot R_2^2}{\gamma} \left(\frac{8\pi [J_1(\mu_n) \cdot I_0(\mu_n) - J_0(\mu_n) \cdot I_1(\mu_n)] - \mu_n [I_0(\mu_n) - J_0(\mu_n)]}{8\pi\mu_n} \right)$$

Звідки

$$T_n''(t) + 2\beta_2 \cdot T_n'(t) + \zeta_n^2 \cdot T_n(t) = \frac{g(t)}{\gamma} \cdot \kappa_n$$

де
$$\zeta_n^2 = c^4 \cdot \frac{\mu_n^4}{R_2^4}, \quad (19)$$

$$\kappa_n = \frac{8\pi \cdot [J_1(\mu_n) \cdot I_0(\mu_n) - J_0(\mu_n) \cdot I_1(\mu_n)] - \mu_n [I_0(\mu_n) - J_0(\mu_n)]}{8\pi\mu_n \cdot J_0^2(\mu_n) \cdot I_0^2(\mu_n)} \quad (20)$$

Тоді власна складова коливань вторинної мембрани опишеться таким інтегральним рівнянням Вольєрра

$$w_\varepsilon(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(k_n r) \cdot \frac{\kappa_n}{\phi_n} \int_0^t \ddot{w}_0(\tau) \cdot e^{-\beta_2(t-\tau)} \cdot \sin(\phi_n(t-\tau)) d\tau \quad (21)$$

де

$$\phi_n = \sqrt{\zeta_n^2 - \beta_2^2} \quad (22)$$

Отже, враховуючи (7), загальна динаміка вторинного пружного елемента у вигляді круглої мембрани опишеться сумою таких інтегральних рівнянь Вольєрра

$$w_2(t, r) = \frac{2}{R_2^2} \left(r^2 \ln \frac{r}{R_2} + \frac{R_2^2 - r^2}{2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(0) \frac{\tilde{\zeta}_n}{\tilde{\eta}_n} \int_0^t p(\tau) e^{-\beta(t-\tau)} \sin(\tilde{\eta}_n(t-\tau)) d\tau + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(k_n r) \cdot \frac{\kappa_n}{\phi_n} \int_0^t \ddot{w}_0(\tau) \cdot e^{-\beta_2(t-\tau)} \cdot \sin(\phi_n(t-\tau)) d\tau \quad (23)$$

Висновки

Отримані динамічні моделі вторинних пружних елементів у формі інтегральних рівнянь Вольєрра є інженерно зручними для дослідження роботи цих елементів при будь-якій формі вхідного сигналу.

Крім цього, отримані рівняння дозволяють досить просто проводити оптимізацію параметрів пружних елементів згідно критерію мінімуму динамічної похибки.

Представлені динамічні моделі та методика їх отримання легко можуть бути використані при проектуванні інших типів вимірювальних приладів і систем.

Література

1. Маркелов И.Г. Комплекс датчиков давления для эксплуатации на объектах атомной энергетики. Sensors & Systems. – 2000. – № 11–12. – С. 24–25.

2. Мокров Е.А. НИИ физических измерений. 45 лет в космическом приборостроении. Датчики и системы. – 2005. – № 9. – С.2–3.
3. Мокров Е.А., Белозубов Е.М. Базовая системная модель нового поколения тонкопленочных тензорезисторных датчиков давления для ракетной и авиационной техники. Датчики и системы. – 2005. – № 6. – С. 10–14.
4. Богонин Б.В., Богонин М.Б. Способ термостабилизации дифференциального датчика и косвенного определения температуры окружающей среды. // Датчики и системы. – 2004. – № 2. – С.22–24.
5. Тихоненков Е.В., Мишин В.А. Схемная минимизация аддитивной температурной погрешности тензорезисторных датчиков давления с мостовой измерительной цепью. // Датчики и системы. – 2006. – № 3. – С. 14–17.
6. Диденко В.И., Заргарьян К.Р. Комбинированный двухпроводный аналоговый датчик давления и температуры. // Датчики и преобразователи информации систем измерения, контроля и управления. / Материалы XVI международной научно-технической конференции. Москва-Судак, 2004. – С. 142–143.
7. Осадчий Е. П., Тихонов А. И., Карпов В. И. и др. Проектирование датчиков для измерений механических величин. Под ред. Осадчего Е. П. –М.: Машиностроение, 1979. – 480 с.
8. Тихонов А. И., Гонтар И. Н. и др. Упругие элементы датчиков механических величин. Учебное пособие, - Пенза: Пензенский политехнический институт, 1988. – 88 с.
9. Тихонов А.И., Тихоненков В.А. Классификация упругих элементов датчиков механических величин. // Приборы и системы управления, 1986. – № 4. – С. 17–19.
10. Корсунов В. П. Упругие чувствительные элементы. - Изд-во Саратов. ун-та, 1980. – 264 с.
11. Тихан М.А., Стрижак В.Я. Высокотемпературный тензорезисторный датчик давления. // Датчики систем измерения, контроля и управления: Межвуз. сб. науч. тр. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. техн. ун-та, 1994. – Вып. 13. – С. 24–28.
12. Тихан М.А. Тензометрический датчик динамического давления. Патент РФ №2040781.- Бюл. №21, 1995. – 4с.
13. Васильев В.А. Тензорезисторный датчик давления. Датчики систем измерения, контроля и управления: Межвуз. сб. науч. тр. -Вып. 8. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. техн. ун-та, 1988. – С. 18–20.
14. Тихан М.О. Побудова динамічних моделей пружних мембран сенсорів. // Всеукраїнський щомісячний науково-технічний і виробничий журнал. – Машинознавство, 2008. – № 7. – С. 26–31.

<p>Тихан М.А. Построение динамических моделей упругих элементов тензорезистивных измерителей переменного давления Построены динамические модели так называемых вторичных упругих элементов тензорезистивных измерителей переменного давления в форме интегральных уравнений Вольтера, что позволяет наиболее эффективно анализировать динамику этих элементов при произвольной форме входного сигнала.</p>	<p>Tykhan M.O. The making elastic elements dynamic models of piezoresistive sensors of change pressure The dynamic models of secondary elastic elements of piezoresistive sensors of change pressure in form of Volterra integral equations has been made. This equations are very handy for analysis of dynamics its elements under any form input.</p>
---	---

*Надійшла до редакції
25 березня 2008 року*