ГІПОТЕЗИ. НЕСТАНДАРТНІ МЕТОДИ РІШЕННЯ НАУКОВИХ ТА ІНЖЕНЕРНИХ ПРОБЛЕМ ПРИЛАДОБУДУВАННЯ

УДК 621.314

ПІДСУМОВУВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПОХИБОК ВИМІРЮВАНЬ

Майстренко В.М., Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», м. Київ, Україна

Запропонована методика підсумовування випадкових сигналів та похибок за допомогою використання спектра функції розподілу. Показано, що при цьому значно спрощуються розрахунки. Також показана можливість використання другого енергетичного спектра для підсумовування випадкових похибок. Отримані формули розрахунку сумарних центральних моментів, за допомогою котрих можна описати сумарну функцію розподілу

Вступ

Задача розрахункового підсумовування похибок є однією з основних задач як при створенні засобів вимірювань, так і при оцінці похибок результатів вимірювань. Вона фактично зводиться до задачі підсумовування випадкових сигналів.

Для визначення похибки навіть окремого вимірювального приладу необхідно підсумовувати всі складові його похибки, наприклад основної, від коливання температури, напруги живлення та інших джерел. При створенні систем вимірювальних пристроїв, наприклад вимірювальних каналів, виникає задача підсумовування похибок декількох вимірювальних об’єктів, що створює вимірювальний канал.

Аналогічна задача виникає при визначенні похибки прямих або непрямих вимірювань, коли потрібно враховувати методичні похибки, похибки відліку тощо.

Складність проведення підсумовування похибок полягає в тому, що всі складові похибки є випадковими величинами, котрі приймають різні значення. Тому вони можуть бути описані своїми законами розподілу, а їх сумісна дія — відповідним багатомірним законом розподілу. Враховуючи те, що складових похибок може бути багато — десятки і навіть сотні — виконати операції з такими багатомірними законами дуже складно. Для спрощення задачі на практиці замість визначення багатомірних законів розподілу підбирають для характеристики складових числові оцінки, такі як середнє квадратичне значення, ентропійне значення. Це дає можливість визначити числову оцінку результуючої похибки без визначення багатомірних та результуючих одномірних законів розподілу випадкових величин, але при цьому різко зростає похибка визначення сумарної похибки.

Отже, задача розрахункового підсумовування похибок — це одна з основних задач як при створенні засобів вимірювань, так і при оцінці похибок результатів самих вимірювань.

Постановка завдання

Випадкова похибка як будь-який випадковий процес має свої числові характеристики, однією з котрих є дисперсія. Корінь квадратний від дисперсії — це середньоквадратичне відхилення. Отже середнє квадратичне відхилення є також числовою характеристикою випадкового процесу. Числові характеристики випадкового процесу (моменти розподілу) дають про нього значно менше інформації, ніж функції розподілу [2]. Але в низці випадків це задовольняє.

При визначенні сумарної похибки підсумовуванням середніх квадратичних відхилень складових похибки також втрачається частина інформації про поведінку окремих складових похибки. Тому для більш точної оцінки сумарної випадкової похибки потрібно використовувати не числові характеристики цього випадкового процесу, а іншу його характеристику — функцію розподілу, котра дає повну характеристику випадкового процесу [2]. В [3 – 6] запропоновано для оцінки випадкових процесів використовувати не тільки функцію розподілу, а також її спектр Фур'є — спектр функції розподілу (СФР).

Покажемо, що такий підхід дозволить врахувати особливості поведінки окремих складових випадкової похибки.

Розрахункове підсумовування випадкових похибок

При підсумовуванні випадкових величин закони їх розподілу різко змінюють свою форму. Закон розподілу суми незалежних випадкових величин $p(x)=p_1(x)+p_2(x)$, що мають функції розподілу $p_1(x)$ та $p_2(x)$, має назву композиції та визначений інтегралом згортки [1]:

$$p(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_1(z)p_2(x-z)dz = p_1(x) * p_2(x). \qquad (1)$$

Як відомо [7], спектр згортки двох функцій дорівнює добутку спектрів цих функцій, отже з (1) витікає, що

$$S_p(\omega)=S_{p_1}(\omega)S_{p_2}(\omega), \qquad (2)$$

де $S_{p_1}(\omega)$ та $S_{p_2}(\omega)$ – СФР $p_1(x)$ та $p_2(x)$ відповідно, а $S_p(\omega)$ – СФР $p(x)$.

Виходячи з того, що тільки енергетична норма є „нечутливою" до зміни форми сигналу [7], а випадковий сигнал, котрим в нашому випадку є випадкова похибка, постійно змінює свою форму, оцінимо енергію сумарного сигналу за допомогою його енергетичного спектра.

В [8] введено поняття другого енергетичного спектра (на відміну від першого — спектра кореляційної функції), котрим є друга похідна СФР з зворотним знаком, а також показано, що другий енергетичний спектр більш точно, ніж спектр кореляційної функції, визначає енергію сигналу. Тому при визначенні сумарної енергії двох сигналів будемо використовувати їх другі енергетичні спектри.

Для цього знайдемо другу похідну СФР, виходячи з (2).

$$S''_p(\omega) = S''_{p_1}(\omega)S_{p_2}(\omega) + S''_{p_2}(\omega)S_{p_1}(\omega) + 2S'_{p_1}(\omega)S'_{p_2}(\omega). \qquad (3)$$

Для зручності використання енергетичні спектри будемо позначати:

$$F(\omega) = -S''_p(\omega);\ F_1(\omega) = -S''_{p_1}(\omega);\ F_2(\omega) = -S''_{p_2}(\omega).$$

Тоді, виходячи з (3)

$$F(\omega) = F_1(\omega)S_{p_2}(\omega) + F_2(\omega)S_{p_1}(\omega) - 2S'_{p_1}(\omega)S'_{p_2}(\omega). \qquad (4)$$

Цей вираз, котрий можна використати для точного розрахункового підсумовування результуючої похибки, є більш зручним у відносному вигляді:

$$\frac{F(\omega)}{S_p(\omega)} = \frac{F_1(\omega)}{S_{p_1}(\omega)} + \frac{F_2(\omega)}{S_{p_2}(\omega)} - 2\frac{S'_{p_1}(\omega)}{S_{p_1}(\omega)}\frac{S'_{p_2}(\omega)}{S_{p_2}(\omega)}. \qquad (5)$$

Для опису різних властивостей розподілів використовують параметри законів розподілу — моменти. СФР також приблизно описується за допомогою перших чотирьох моментів [3, 4, 5], а для опису похибок — центральних моментів. Отже

$$S_{p_1}(\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{2}M_2\{\xi\} + j\frac{\omega^3}{6}M_3\{\xi\} + \frac{\omega^4}{24}M_4\{\xi\}, \qquad (6)$$

$$S_{p_2}(\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{2}M_2\{\eta\} + j\frac{\omega^3}{6}M_3\{\eta\} + \frac{\omega^4}{24}M_4\{\eta\}, \qquad (7)$$

де $M_2\{\xi\}$, $M_2\{\eta\}$, $M_3\{\xi\}$, $M_3\{\eta\}$, $M_4\{\xi\}$, $M_4\{\eta\}$ — центральні моменти випадкових процесів $\xi(t)$ та $\eta(t)$.

Виходячи з (2) для находження сумарного спектра потрібно знайти добуток цих спектрів

$$S_p(\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{2}\left[M_2\{\xi\} + M_2\{\eta\}\right] + j\frac{\omega^3}{6}\left[M_3\{\xi\} + M_3\{\eta\}\right] +$$

$$+ \frac{\omega^3}{6}\left[M_4\{\xi\} + M_4\{\eta\} + 6M_2\{\xi\}M_2\{\eta\}\right], \qquad (8)$$

а потім другу похідну від сумарного спектра

$$S''_p(\omega) = -\left[M_2\{\xi\} + M_2\{\eta\}\right] + j\omega\left[M_3\{\xi\} + M_3\{\eta\}\right] +$$

$$+ \frac{\omega^2}{2}\left[M_4\{\xi\} + M_4\{\eta\} + 6M_2\{\xi\}M_2\{\eta\}\right]. \qquad (9)$$

Таким чином енергетичний спектр

$$F(\omega) = \left[M_2\{\xi\} + M_2\{\eta\}\right] - j\omega\left[M_3\{\xi\} + M_3\{\eta\}\right] -$$

$$- \frac{\omega^2}{2}\left[M_4\{\xi\} + M_4\{\eta\} + 6M_2\{\xi\}M_2\{\eta\}\right]. \qquad (10)$$

Розглядаючи структуру виразу (10) можна прийти до висновку, що його перший член дає відомий результат, наприклад з [1], коли сумарний момент другого порядку випадкового процесу знаходять шляхом підсумовування моментів другого порядку випадкових процесів – складових. Але вираз (10) значно підвищує точність розрахунку, враховуючи також вплив моментів третього і четвертого порядків.

З (6 – 10) видно, що сумарні центральні моменти розподілу при підсумовуванні двох незалежних випадкових процесів розраховуються за наступними формулами:

$$M_2\{\xi,\eta\}=M_2\{\xi\}+M_2\{\eta\};\ M_3\{\xi,\eta\}=M_3\{\xi\}+M_3\{\eta\};$$

$$M_4\{\xi,\eta\}=M_4\{\xi\}+M_4\{\eta\}+6M_2\{\xi\}M_2\{\eta\}, \qquad (11)$$

тобто другі та треті моменти просто підсумовуються, а в четвертих до суми додається додатковий член, котрий складається з добутку моментів другого порядку з коефіцієнтом 6.

Цей результат можна отримати іншим шляхом, виходячи з виразу для двомірного СФР [6]

$$S_p(\omega,\Omega)=1-\frac{1}{2}\left(\omega^2M_2\{\xi\}+2\omega\Omega M_2\{\xi,\eta\}+\Omega^2M_2\{\eta\}\right)+$$

$$+j\frac{1}{6}\left(\omega^3M_3\{\xi\}+3\omega^2\Omega M_3\{\xi_2,\eta\}+3\omega\Omega^2M_3\{\xi,\eta_2\}+\Omega^3M_3\{\eta\}\right)+ \qquad (12)$$

$$+\frac{1}{24}\left(\omega^4M_4\{\xi\}+4\omega^3\Omega M_4\{\xi_3,\eta\}+6\omega^2\Omega^2M_4\{\xi_2,\eta_2\}+4\omega\Omega^3M_4\{\xi,\eta_3\}+\Omega^4M_4\{\eta\}\right).$$

Друга похідна двомірного СФР

$$S_p(\omega,\Omega)=-\left(M_2\{\xi\}+2M_2\{\xi,\eta\}+M_2\{\eta\}\right)+$$

$$+j\left(\omega M_3\{\xi\}+\omega M_3\{\xi,\eta_2\}+\omega M_3\{\xi_2,\eta\}+\Omega M_3\{\xi,\eta_2\}+\Omega M_3\{\xi_2,\eta\}+\Omega M_3\{\eta\}\right)+$$

$$+\frac{\omega^2}{2}\left(M_4\{\xi\}+2M_4\{\xi_3,\eta\}+M_4\{\xi_2,\eta_2\}\right)+\omega\Omega\left(M_4\{\xi_3,\eta\}+2M_4\{\xi_2,\eta_2\}+M_4\{\xi,\eta_3\}\right)+$$

$$+\frac{\Omega^2}{2}\left(M_4\{\eta\}+2M_4\{\xi,\eta_3\}+M_4\{\xi_2,\eta_2\}\right). \qquad (13)$$

Для незалежних випадкових величин (13) переходить в (9) і енергетичний спектр описується (10). При наявності кореляційного зв’язку між випадковими величинами моменти в (13) потрібно знаходити відповідно до наступних виразів [2]:

$$M_2\{\xi,\eta\}=R_1\sqrt{M_2\{\xi\}M_2\{\eta\}},\ M_3\{\xi_2,\eta\}=R_2\sqrt[3]{M_3^2\{\xi\}M_3\{\eta\}},$$

$$M_3\{\xi,\eta_2\}=R_3\sqrt[3]{M_3\{\xi\}M_3^2\{\eta\}},\ M_4\{\xi_3,\eta\}=R_4\sqrt[4]{M_4^3\{\xi\}M_4\{\eta\}},$$

$$M_4\{\xi,\eta_3\}=R_5\sqrt[4]{M_4\{\xi\}M_4^3\{\eta\}},$$

де $R_1,\ldots,R_5$ – коефіцієнти кореляції.

При підсумовуванні чотирьох випадкових похибок, описуючи СФР кожної з них за допомогою перших трьох центральних моментів, можна спочатку замінити моменти двох похибок моментами сумарної похибки відповідно до виразів (11), а потім сумарні похибки підсумувати аналогічно, також виходячи з (11).

В наслідок отримаємо:

$$M_2\{\xi,\eta,\vartheta,\nu\}=M_2\{\xi\}+M_2\{\eta\}+M_2\{\vartheta\}+M_2\{\nu\};$$
$$M_3\{\xi,\eta,\vartheta,\nu\}=M_3\{\xi\}+M_3\{\eta\}+M_3\{\vartheta\}+M_3\{\nu\};$$
$$M_4\{\xi,\eta,\vartheta,\nu\}=M_4\{\xi,\eta\}+M_4\{\vartheta,\nu\}+6M_2\{\xi\}M_2\{\eta\}+6M_2\{\vartheta\}M_2\{\nu\}+$$
$$+6M_2\{\xi,\eta\}M_2\{\vartheta,\nu\}=M_4\{\xi\}+M_4\{\eta\}+M_4\{\vartheta\}+M_4\{\nu\}+6(M_2\{\xi\}M_2\{\eta\}+$$
$$+M_2\{\xi\}M_2\{\vartheta\}+M_2\{\xi\}M_2\{\nu\}+M_2\{\eta\}M_2\{\vartheta\}+M_2\{\eta\}M_2\{\nu\}+M_2\{\vartheta\}M_2\{\nu\});\quad(14)$$

При аналогічному підсумовуванні будь-якої кількості випадкових похибок можна показати, що другий та третій центральні моменти просто додаються, а четвертий центральний момент складається з суми четвертих моментів складових плюс суми сполучень з двох центральних моментів другого порядку з коефіцієнтом 6:

$$M_2\left\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right\}=\sum_{i=1}^{n}M_2\{\xi_i\},\; M_3\left\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right\}=\sum_{i=1}^{n}M_3\{\xi_i\},$$
$$M_4\left\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right\}=\sum_{i=1}^{n}M_4\{\xi_i\}+6\sum_{i<j}M_2\{\xi_i\}M_2\{\xi_j\}.\quad(15)$$

де $M_2\{\xi_i\}$, $M_3\{\xi_i\}$, $M_4\{\xi_i\}$– центральні моменти випадкового процесу $\xi_i(t)$, i– порядковий номер випадкового процесу.

На підставі сумарних центральних моментів можна знайти сумарний СФР, а з нього – саму сумарну функцію розподілу. Для цього скористуємося виразом для сумарного СФР спочатку для початкових моментів [3]:

$$S_p(\omega)=1-j\omega a-\frac{\omega^2}{2}m_2+j\frac{\omega^3}{6}m_3+\frac{\omega^4}{24}m_4,$$

де a – математичне сподівання сумарного випадкового процесу,
m_2, m_3, m_4 – сумарні початкові моменти.

В такому вигляді СФР складається з п’яти наступних елементарних СФР:

$$S_{p_0}(\omega)=1,\; S_{p_1}(\omega)=-j\omega a,\; S_{p_2}(\omega)=-\frac{\omega^2}{2}m_2,\; S_{p_3}(\omega)=j\frac{\omega^3}{6}m_3,\; S_{p_4}(\omega)=\frac{\omega^4}{24}m_4.$$

Ці СФР можна уявити як інтегральні перетворення:

$$S_{p_1}(\omega)=-ja\int d\omega=-ja\int S_{p_0}(\omega)d\omega;\quad(16)$$
$$S_{p_2}(\omega)=-m_2\int\omega d\omega=-m_2\iint S_{p_0}(\omega)d\omega^2;\quad(17)$$
$$S_{p_3}(\omega)=j\frac{m_3}{2}\int\omega^2 d\omega=j\frac{m_3}{2}\iiint S_{p_0}(\omega)d\omega^3;\quad(18)$$
$$S_{p_4}(\omega)=\frac{m_4}{6}\int\omega^3 d\omega=\frac{m_4}{6}\iiiint S_{p_0}(\omega)d\omega^4.\quad(19)$$

Виходячи з теореми про інтегрування спектральної функції [12], а також переходячи від спектральної функції $S_{p_0}(\omega)$ до її функції розподілу, тобто $p_0(x)=\delta(x)$, і підставляючи її в (16 – 19), отримаємо:

$$p_1(x)=-\frac{a}{x},\ p_2(x)=\frac{m_2}{x^2},\ p_3(x)=-\frac{m_3}{2x^3},\ p_4(x)=\frac{m_4}{6x^4}.$$

Використовуючи теорему накладення [13]: спектральна функція суми сигналів дорівнює сумі спектральних функцій складових, сумарна функція розподілу

$$p(x)=p_0(x)+p_1(x)+p_2(x)+p_3(x)+p_4(x)=\delta(x)\left(1-\frac{a}{x}+\frac{m_2}{x^2}-\frac{m_3}{2x^3}+\frac{m_4}{6x^4}\right),$$

а для центральних моментів

$$p(x)=\delta(x)\left(1+\frac{M_2\left\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right\}}{x^2}-\frac{M_3\left\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right\}}{2x^3}+\frac{M_4\left\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right\}}{6x^4}\right).$$

По сумарній функції розподілу можна визначити ширину розподілу, тобто сумарну похибку.

Висновки

Запропонована у роботі методика підсумовування випадкових сигналів та похибок за допомогою використання спектра функції розподілу значно спрощує розрахунки, що необхідно для створення контрольно-вимірювальних засобів та систем. Це є перспективним напрямком досліджень для вирішення проблем швидкодії вимірювальної техніки.

Література

1. П.В. Новицкий, И.А. Зограф. Оценка погрешностей результатов измерений. – Л.: Энергоатомиздат, 1991. – 302 с.
2. Б.Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: Советское радио, 1974. – 549 с.
3. В.М. Майстренко. Спектри одномірних функцій розподілу випадкових процесів // Вісник НТУУ «КПІ» серія приладобудування. – 2003. – № 26. – С. 145 – 150.
4. В.М. Майстренко. Дослідження спектрів одномірних функцій розподілу випадкових процесів // Третя науково-технічна конференція „Приладобудування – 2004: Стан і перспективи” 20 – 21 квітня 2004 р. м. Київ, Україна, Збірка наукових праць. НТУУ «КПІ». – 2004. – С. 137 – 138.
5. В.М. Майстренко. Дослідження спектрів одномірних функцій розподілу випадкових процесів // Вісник НТУУ «КПІ» серія приладобудування. – 2004. – № 27. – С. 163 – 170.
6. В.М. Майстренко. Спектри двомірних функцій розподілу випадкових процесів // Вісник НТУУ «КПІ» серія приладобудування. – 2005. – № 29. – С. 160 – 168.
7. А.А. Харкевич. Спектры и анализ. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 235 с.
8. В.М. Майстренко. Другий енергетичний спектр ергодичного випадкового процесу // Віс-

ник НТУУ «КПІ» серія приладобудування. – 2006. – № 32. – С. 158 – 170.

9. С.И. Баскаков. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высшая школа, 2003. – 462 с.
10. В.М. Майстренко. Енергетичний сигнал та його особливості // Методи та прилади контролю якості. – 2005. – №15. – С.23 – 27
11. В.М. Майстренко. Зв'язок спектра функції розподілу стаціонарного випадкового процесу з енергетичним спектром // Вісник НТУУ «КПІ» серія приладобудування. – 2005. – № 30. – С. 157 – 166.
12. И.С. Гоноровский. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: «Советское радио», 1971. – 671 с.
13. В.Г. Криксунов. Спектральний аналіз електричних сигналів. – К.: Техніка, 1971. – 193 с.

Майстренко В.Н. **Суммирование случайных погрешностей измерений.** Предложена методика суммирования случайных сигналов и погрешностей при помощи использования спектра функции распределения. Показано, что при этом значительно упрощаются расчеты. Также показана возможность использования второго энергетического спектра для суммирования случайных сигналов. Получены формулы расчета суммарных центральных моментов, с помощью которых можно описать суммарную функцию распределения.	Maystrenko V.N. **Summation of casual errors of the measurements.** The technique of summation of casual signals and errors is offered through use of a spectrum of function of distribution. Is shown, that thus accounts considerably become simpler. An opportunity of use of the second power spectrum for summation of casual signals also is shown. The formulas of account of the total central moments are received, with which help it is possible to describe total function of distribution.

Надійшло до редакції
25 червня 2007 року