

**ГІПОТЕЗИ. НЕСТАНДАРТНІ МЕТОДИ РІШЕННЯ НАУКОВИХ ТА  
ІНЖЕНЕРНИХ ПРОБЛЕМ ПРИЛАДОБУДУВАННЯ**

УДК 621.314

**ДРУГИЙ ЕНЕРГЕТИЧНИЙ СПЕКТР ЕРГОДИЧНОГО ВИПАДКОВОГО  
ПРОЦЕСУ**

*Майстренко В.М., Національний технічний університет України «Київський  
політехнічний інститут», м. Київ, Україна*

*Розглянуто структуру енергетичних спектрів синусоїдних сигналів та їх кореляційної функції, а також періодичних та неперіодичних сигналів, котрі складаються з окремих синусоїдних сигналів, і випадкових сигналів. Показано, що оцінку енергетичного спектра випадкових сигналів можна проводити, вважаючи, що він є спектром кореляційної функції або спектром енергетичного сигналу випадкового процесу*

**Вступ**

Більшість сигналів у практиці мають випадковий характер. Жоден реальний процес не може бути точно визначеним, тобто заданим функцією часу.

На відміну від детермінованої функції, що одночасно визначає і, отже, точно передбачає значення величини, котра описується в будь-який заданий момент часу, значення випадкової функції передбаченими бути не можуть. Найбільше, що можна знати заздалегідь про поведінку випадкової функції — це ймовірність, з якою вона в майбутньому може прийняти той чи інший вигляд з множини можливих.

У низці практично важливих задач випадковий процес разом з ймовірнісним описом може бути представлений сукупністю невинуватих числових характеристик, постійних, або таких, що змінюються в часі. Операції над числовими характеристиками спрощують вирішення задачі, тобто необхідно, щоб вони відображали найбільш суттєві властивості випадкового процесу та сигналу, що є окремим випадком випадкового процесу. Проте відомі характеристики [1–3]. дуже приблизно оцінюють поведінку випадкового сигналу, але вони можуть вважатися першим кроком від випадкового сигналу, який безпосередньо можна оцінити тільки за допомогою ансамблю реалізацій, що для вирішення теоретичних і практичних задач мало допомагає. Інша справа — детермінований сигнал, з яким все ясно і достатньо просто. Тому єдиним методом оцінки випадкового сигналу є перехід до еквівалентного за певними ознаками детермінованого сигналу, аналогічно тому, як зовнішню поведінку певних складних пристроїв, наприклад електронних активних елементів, оцінюють за допомогою їх еквівалентних схем.

Другим кроком можна вважати використання функції розподілу ймовірності випадкового процесу і, особливо, її похідну — щільність ймовірності розподілу випадкового процесу, яка є значно більш зручною для використання. В подальшому для скорочення будемо називати її функцією розподілу.

### **Постановка завдання**

Найбільш ефективним можна вважати третій крок, котрий полягає в використанні дуже важливої характеристики випадкового процесу — функції кореляції, що виражає статистичний зв'язок між миттєвими значеннями сигналу, взятими в два моменти часу. Кореляційна функція — це детермінована функція часу, котра відображає поведінку випадкового процесу. Як і будь-яка функція часу вона має свою спектральну щільність, котра є енергетичним спектром випадкового процесу або сигналу. За допомогою енергетичного спектра можна більш точно, ніж за допомогою моментів, оцінювати поведінку випадкового сигналу. Але недоліком такого підходу є те, що за основу побудови еквівалентної часової функції прийнятий зв'язок між миттєвими значеннями випадкового сигналу в різні моменти часу, а не миттєва потужність.

### **Енергетичні спектри**

Будемо виходити з фізичної трактовки спектра функції розподілу (СФР) [4–6]. Спектр, тобто спектральна щільність функції розподілу, визначає амплітуди полімодальних функцій розподілу у вигляді синусоїд з різними відстанями між модами, з яких формується загальна функція розподілу. Оскільки ймовірність не може бути негативною, то всі вони мають постійну складову так, що мінімуми відповідають нульовій ймовірності, а сума постійних складових усіх полімодальних функцій дорівнює одиниці. Тобто загальна ймовірність кожної полімодальної функції розподілу дорівнює площі, зосередженої під нею. Це дає можливість розглядати будь-яку функцію розподілу випадкового процесу як таку, що складається з полімодальних функцій розподілу з різними відстанями між модами, тобто розкласти функцію розподілу на елементарні полімодальні функції розподілу.

Елементарні полімодальні функції розподілу зв'язані з ймовірністю з'явлення синусоїдних складових сигналу в загальному випадковому процесі. Отже частотні складові СФР жорстко зв'язані з частотними складовими випадкового процесу, а це дає можливість перейти від ймовірнісних значень до миттєвих значень сигналу. Цю можливість підтверджує перша похідна СФР, котра є спектром функції  $x\rho(x)$ , помноженим на  $j$  [4]. Ця функція, котра є добутком миттєвого значення випадкового процесу на ймовірність з'явлення цього значення, перекидає місток від ансамблю реалізацій випадкового процесу до еквівалентної детермінованої функції.

Дійсно, виходячи з властивості ергодичності, котра полягає в тому, що усереднення по ансамблю такого процесу є еквівалентним усередненню по часу, усереднення по часу можна здійснювати шляхом статистичної обробки всього однієї реалізації випадкового процесу. Тому середнє значення функції  $x\rho(x)$  дорівнює середньому значенню випадкового процесу при достатньо великому часі усереднення:

$$\overline{\xi(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \xi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx,$$

де  $T$  – час усереднення.

Отже спектр функції  $xp(x)$  наближається до спектру випадкового процесу, а зворотний перехід від спектра до часової функції дозволяє вважати функцію  $tp(t)$  детермінованою функцією часу, еквівалентною за частотним спектром ергодичному випадковому процесу.

Найбільш цікавою для опису випадкового процесу є друга похідна спектра функції розподілу [4, 5]:

$$S_p''(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) e^{-j\omega x} dx, \quad (1)$$

яка є спектром функції  $f(x) = x^2 p(x)$  з зворотним знаком. Ця функція складається з добутку двох наступних функцій:  $f_1(x) = x^2$  та  $p(x)$ . Очевидно, що перша з них виражає потужність сигналу на певному рівні, а друга – ймовірність з'явлення цього рівня. Таким чином функція  $f(x)$  визначає ймовірність з'явлення різної потужності сигналу. Тоді спектральні складові спектральної щільності цієї функції визначають потужність відхилення сигналу від нульового значення з різною частотою, або енергетичний спектр відхилення від нуля.

Для різних розрахунків при ергодичному випадковому процесі широко використовується середньоквадратичне відхилення від нульового значення сигналу, тобто дисперсія [1]

$$\overline{\xi^2(t)} = \sigma^2 = D = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = -S_p''(0), \quad (2)$$

котра є значенням другої похідної спектра функції розподілу при  $\omega = 0$  із зворотним знаком. Очевидно, що друга похідна функції розподілу з зворотним знаком є більш представницькою і характеризує енергію випадкового процесу.

В той же час кожний випадковий процес характеризується власним енергетичним спектром, котрий є перетворенням Фур'є від кореляційної функції [1]

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2, \quad (3)$$

де  $x_1$  та  $x_2$  – рівні сигналу в моменти часу  $t_1 = 0$  та  $t_2 = \tau$ .

Енергетичний спектр

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (4)$$

В (3) рівні одного сигналу  $x_1$  та  $x_2$  розглядаються як незалежні сигнали. З огляду на запропонований спектральний підхід такий процес описується двовірним СФР [7]:

$$S''_{p\omega_1\omega_2}(\omega_1, \omega_2) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_2(x_1, x_2) e^{-j\omega_1 x_1} e^{-j\omega_2 x_2} dx_1 dx_2,$$

маючи на увазі, що перший сигнал – це  $\xi(t)$ , і другий –  $\eta(t)$ .

При цьому можна розглядати не одну, а три дисперсії [7]:

$$m_2\{\xi\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 p_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = -S''_{p\omega_1^2}(0, 0)$$

$$m_2\{\eta\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_2^2 p_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = -S''_{p\omega_2^2}(0, 0)$$

$$m_2\{\xi, \eta\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = -S''_{p\omega_1\omega_2}(0, 0)$$

Для одномірного сигналу таке ускладнення є недоречним, тому (3) краще уявляти у вигляді згортки двох функцій  $\sqrt{f(x)}$  або  $f_1(x)$  та  $p(x)$ . Але тут виникає трудність, яка полягає в тому, що  $x$  – це миттєве значення сигналу, а  $\tau$  – час.

Для вирішення цієї проблеми повернемося до СФР, в якому кожна спектральна складова разом з своєю частиною постійної складової відповідає елементарній полімодальній функції розподілу, з котрих складається загальна функція розподілу. Випадковий сигнал на протязі часу приймає різні випадкові значення, ймовірність з'явлення яких визначається функцією розподілу. Усереднена дія такого сигналу за досить великий проміжок часу еквівалентна дії імпульсного сигналу, що має форму функції розподілу. Це підтверджується тим, що математичне сподівання сигналу є його постійною складовою, а дисперсія — середньою потужністю. При цьому математичне сподівання є сумою добутків миттєвих значень сигналу, помножених на ймовірність їх з'явлення, а дисперсія — сумою добутків квадратів миттєвих значень (тобто миттєвих потужностей), теж помножених на ймовірність їх з'явлення. В еквівалентному детермінованому сигналі миттєве значення як раз і відповідає рівню ймовірності його з'явлення у випадковому сигналі.

Отже, якщо замінити аргумент у функції розподілу замість значення сигналу часом, отримаємо детермінований сигнал, еквівалентний з точки зору середнього, середньо квадратичного значень та значень більш високого порядку. Це дає можливість записати кореляційну функцію у вигляді згортки функції  $\sqrt{f(t)}$ , що є автокореляційною функцією, або  $f_1(t)$  та  $p(t)$ , тобто

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} t \sqrt{p(t)} (t - \tau) \sqrt{p(t - \tau)} dt,$$

або

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) (t - \tau)^2 dt.$$

Виходячи з цього можна вважати, що енергетичний спектр випадкового процесу є спектром згортки  $f_1(t)$  та  $p(t)$ , а друга похідна СФР з зворотним

знаком – спектром добутку цих функцій. І навпаки – енергетичний спектр є добутком спектрів функцій  $f_1(t)$  та  $p(t)$ , а друга похідна СФР з зворотним знаком – їх згорткою.

Випадкові процеси, з якими мають справу для вирішення практичних і теоретичних задач, описуються не кореляційною функцією, а функцією розподілу. Тому доцільно порівняти енергетичний спектр з другою похідною СФР з зворотним знаком.

Почнемо з елементарних періодичних синусоїдного та косинусоїдного сигналів, з яких складаються спектри складних сигналів.

Миттєва потужність двох синусоїдних сигналів, зсунутих на кут  $\varphi$

$$w_s(t) = A^2 \sin \omega_1 t \sin(\omega_1 t - \varphi) = \frac{A^2}{2} [\cos \varphi - \cos(2\omega_1 t - \varphi)]. \quad (5)$$

Потужність аналогічних косинусоїдних сигналів

$$w_c(t) = A^2 \cos \omega_1 t \cos(\omega_1 t - \varphi) = \frac{A^2}{2} [\cos \varphi + \cos(2\omega_1 t - \varphi)]. \quad (6)$$

Вирази (5, 6) показують, що миттєва потужність складається з двох частин: постійної та косинусоїдної, котра має подвійну частоту у порівнянні з вихідною частотою. Швидкість надходження енергії для споживання не є постійною.

Активна потужність є середнім значенням миттєвої потужності за період [3, 8], тобто

$$W = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} w(t) dt = \frac{A^2}{2} \cos \varphi.$$

При зсуві фаз  $\varphi = 0$  миттєва потужність синусоїдного та косинусоїдного сигналу є чисто активною:

$$w_s(t) = A^2 \sin^2 \omega_1 t = \frac{A^2}{2} (1 - \cos 2\omega_1 t), \quad (7)$$

$$w_c(t) = A^2 \cos^2 \omega_1 t = \frac{A^2}{2} (1 + \cos 2\omega_1 t). \quad (8)$$

Виходячи з (5, 6), а також того, що при наявності реактивної складової потужності крива миттєвої потужності входить до області протилежного знаку (рис. 1) на час  $t = \frac{\varphi}{\omega_1}$  [8], можна показати, що реактивна потужність може бути визначеною як:

$$Q = \frac{A^2}{2} \sin \varphi = \omega_1 \int_0^{\frac{\varphi}{\omega_1}} w_c(t) dt - \varphi W = \varphi W - \omega_1 \int_0^{\frac{\varphi}{\omega_1}} w_s(t) dt.$$

Отже зміна знаку миттєвої потужності означає наявність у складі повної потужності реактивної складової, причому тим більшу, чим більша площа під частиною кривої протилежного знаку. У випадку, коли ці площі є однаковими, активна складова потужності буде відсутня.

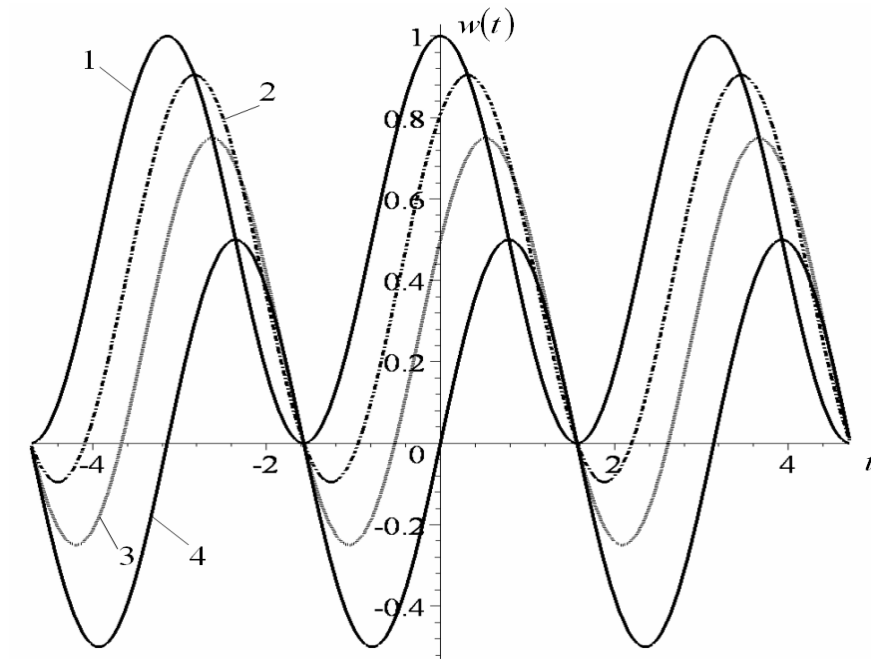


Рисунок 1 – Зміна миттєвої потужності в часі при  $A=1\text{ В}$  та  $\omega = 1\frac{1}{c}$  косинусоїдного сигналу при  $\varphi = 0$  (крива 1),  $\varphi = \frac{\pi}{5}$  (крива 2),  $\varphi = \frac{\pi}{3}$  (крива 3)

Автокореляційні функції цих сигналів:

для косинусоїдного періодичного (з періодом  $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ ) [2]

$$K_c(\tau) = \frac{A^2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \cos(\omega_1 t - \varphi) \cos[\omega_1(t - \tau) - \varphi] dt = \frac{A^2}{2} \cos \omega_1 \tau, \quad (9)$$

по аналогії для синусоїдного періодичного

$$K_s(\tau) = \frac{A^2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \sin(\omega_1 t - \varphi) \sin[\omega_1(t - \tau) - \varphi] dt = \frac{A^2}{2} \cos \omega_1 \tau, \quad (10)$$

тобто автокореляційні функції для обох випадків співпадають.

Знайдемо активну складову кореляційної функції (9, 10):

$$W_s = W_c = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} \frac{A^2}{2} \cos \omega_1 \tau d\tau = 0.$$

Отже потужність автокореляційної функції періодичного синусоїдного або косинусоїдного сигналів є чисто реактивною.

Відзначимо, що автокореляційна функція не надає ніякої інформації про початкову фазу сигналу  $\varphi$ , тому що у кінцевих виразах (9, 10) фазовий кут відсутній. Натомість потужність двох синусоїдних сигналів, зсунутих на кут  $\varphi$ , залежить від цієї фази. Але для власної потужності сигналу (7, 8) зсув фаз  $\varphi$  дорівнює нулю. Крім того, в цьому випадку миттєва потужність завжди позитивна, натомість автокореляційна функція змінює полярність. Зміна миттєвої потужності синусоїдного сигналу в часі та його автокореляційна функція приведені на рис. 2.

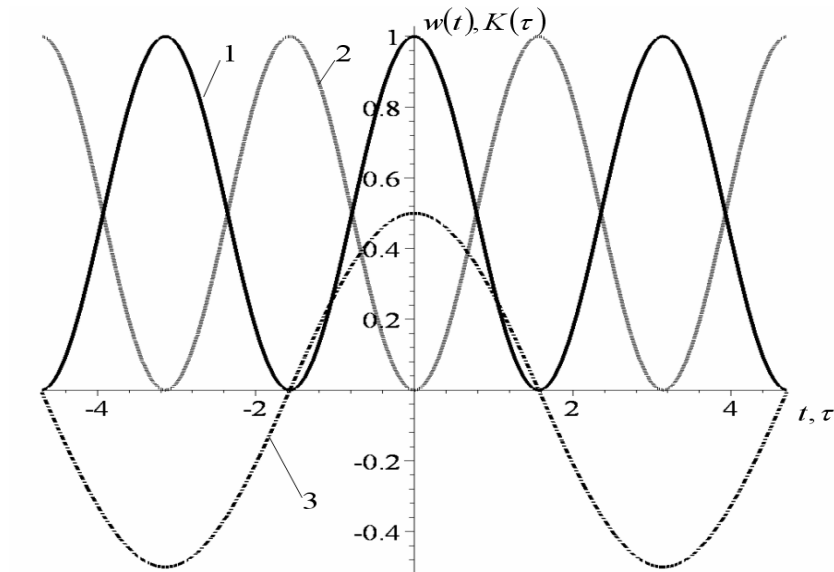


Рисунок 2 – Зміна миттєвої потужності косинусоїдного (крива 1) та синусоїдного сигналів (крива 2) в часі при  $A=1\text{В}$  та  $\omega=1\frac{1}{c}$  та кореляційна функція цього ж сигналу (крива 3)

Миттєва потужність двох синусоїдних періодичних сигналів виражена

$$w_s(t) = [A_1 \sin(\omega_1 t - \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t - \varphi_2)]^2 = \frac{A_1^2}{2} \{1 - \cos[2(\omega_1 t - \varphi_1)]\} +$$

$$+ \frac{A_2^2}{2} \{1 - \cos[2(\omega_2 t - \varphi_2)]\} + A_1 A_2 \cos[(\omega_1 t - \varphi_1) - (\omega_2 t - \varphi_2)] -$$

$$- A_1 A_2 \cos[(\omega_1 t - \varphi_1) + (\omega_2 t - \varphi_2)],$$

косинусоїдних періодичних сигналів

$$w_c(t) = [A_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2)]^2 = \frac{A_1^2}{2} \{1 + \cos[2(\omega_1 t - \varphi_1)]\} +$$

$$+ \frac{A_2^2}{2} \{1 + \cos[2(\omega_2 t - \varphi_2)]\} + A_1 A_2 \cos[(\omega_1 t - \varphi_1) - (\omega_2 t - \varphi_2)] +$$

$$+ A_1 A_2 \cos[(\omega_1 t - \varphi_1) + (\omega_2 t - \varphi_2)],$$

синусоїдних та косинусоїдних періодичних сигналів

$$w_c(t) = [A_1 \sin(\omega_1 t - \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_1 t - \varphi_1)]^2 = \frac{A_1^2}{2} \{1 - \cos[2(\omega_1 t - \varphi_1)]\} + \\ + \frac{A_2^2}{2} \{1 + \cos[2(\omega_2 t - \varphi_2)]\} + A_1 A_2 \sin[(\omega_1 t - \varphi_1) - (\omega_2 t - \varphi_2)] + \\ + A_1 A_2 \sin[(\omega_1 t - \varphi_1) + (\omega_2 t - \varphi_2)],$$

і миттєва потужність для цих випадків при нульовому зсуві фаз:

$$w_s(t) = \frac{A_1^2}{2}(1 - \cos 2\omega_1 t) + \frac{A_2^2}{2}(1 - \cos 2\omega_2 t) + A_1 A_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t] - A_1 A_2 \cos[(\omega_1 + \omega_2)t],$$

$$w_c(t) = \frac{A_1^2}{2}(1 + \cos 2\omega_1 t) + \frac{A_2^2}{2}(1 + \cos 2\omega_2 t) + A_1 A_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t] + A_1 A_2 \cos[(\omega_1 + \omega_2)t],$$

$$w_{sc}(t) = \frac{A_1^2}{2}(1 - \cos 2\omega_1 t) + \frac{A_2^2}{2}(1 + \cos 2\omega_2 t) + A_1 A_2 \sin[(\omega_1 - \omega_2)t] + A_1 A_2 \sin[(\omega_1 + \omega_2)t].$$

Аналізуючи отримані вирази, можна зробити висновок, що сумарна потужність двох синусоїдних, косинусоїдних або синусоїдного та косинусоїдного сигналів, незалежно від початкової фази кожного з них, дорівнює потужності кожного з сигналів та потужності складових з сумарною та різницевою частотами, котрі, як відомо, є комбінаційними частотами. Крім того, відзначимо, що потужність сигналу, котрий складається з двох найпростіших складових, завжди є активною, тому що квадрат суми двох синусів, косинусів, або їх комбінації дорівнює добутку квадратів комбінацій синусів і косинусів суми і різниці кутів [9], тобто

$$[\sin(\omega_1 t - \varphi_1) + \sin(\omega_1 t - \varphi_1)]^2 = 4 \sin^2\left(\frac{\omega_1 t + \omega_2 t - \varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\omega_1 t - \omega_2 t - \varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

і аналогічні вирази при будь-якій комбінації синуса та косинуса.

Добуток квадратів є функцією позитивною. Комбінаційні ж частоти є реактивними потужностями (змінюються за законом синуса), але в сумарній потужності, зменшуючи активну складову, при двох частотах сигналу не надають реактивної складової. Для ілюстрації на рис. 3 приведена сума миттєвих потужностей синусоїдного та косинусоїдного сигналів при відсутності зсуву фаз кожної складової та миттєва потужність суми цих же сигналів. Як бачимо, обидві суми є чисто активними, але сума миттєвих потужностей має більшу величину потужності. Це пояснюється відсутністю комбінаційних частот, які через свою реактивність зменшують активну потужність.

Навіть у випадку чисто активної потужності, що створюється двома синусоїдними або косинусоїдними сигналами, її спектр складається з постійної та косинусоїдної складових, причому остання є чисто реактивною, тому що без постійної складової буде косинусоїдою, інтервал від котрої за період дорівнює нулю. Отже активна потужність обов'язково містить реактивну складову, котра зменшує загальну активну потужність. При наявності в спектрі потужності додаткових реактивних складових активна потужність в залежності від їх фази



може зменшуватись або збільшуватись.

Зв'язок між автокореляційною функцією періодичного сигналу і енергетичним спектром встановлений в [8]:

$$K_{T_1}(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2}{2} \cos n\omega_1 \tau. \quad (10)$$

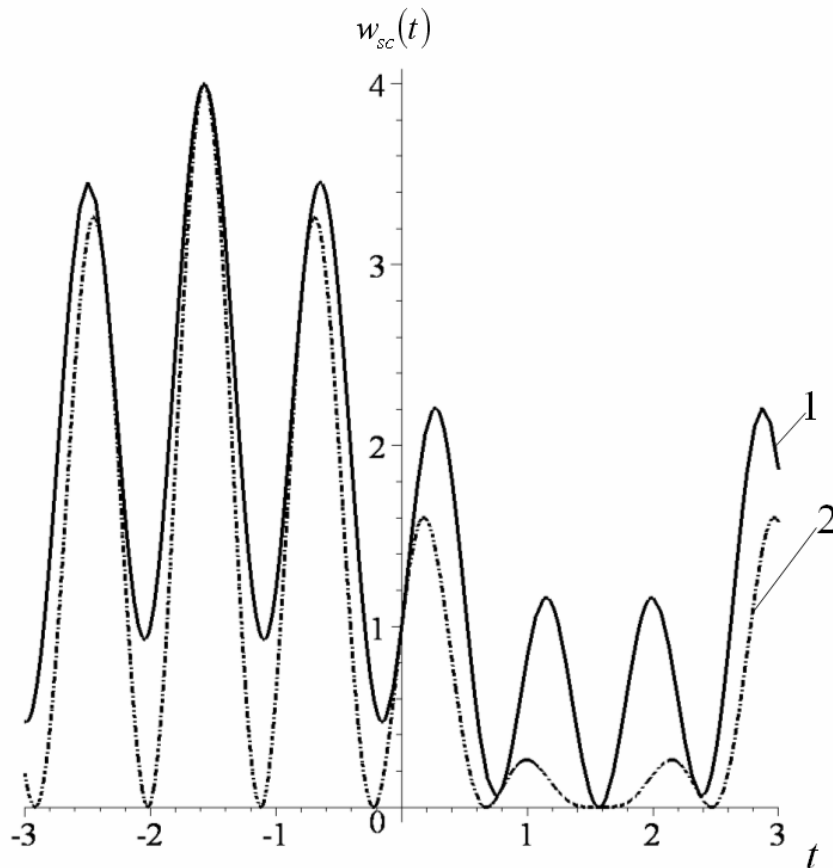


Рисунок 3 – Сума миттєвих потужностей синусоїдного та косинусоїдного сигналів при  $A_1 = A_2 = 1$  В та  $\omega_1 = 3\frac{1}{c}$ ,  $\omega_2 = 4\frac{1}{c}$  при відсутності зсуву фаз кожної складової (крива 1) та миттєва потужність суми цих же сигналів (крива 2)

При цьому середня потужність при  $\tau = 0$  дорівнює  $K_{T_1}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2}{2} = \overline{s^2(t)}$ , де  $s^2(t)$  – будь-який періодичний сигнал.

Встановимо тепер зв'язок між періодичним сигналом та його енергетичним спектром. Миттєва потужність такого сигналу  $w_{T_1}(t) = s^2(t)$ . Представимо  $s(t)$

$$\text{у вигляді ряду Фур'є: } s(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{jn\omega_1 t}.$$

Квадрат цього ряду є сумою складових:

$$w_{T_1}(t) = \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \cos 2n\omega_1 t \right) + \frac{1}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_k A_m e^{j(k+m)\omega_1 t}, \text{ при } |k| \neq |m|. \quad (11)$$

Порівнюючи (10) з (11), можна відзначити, що як і для найпростіших синусоїдного і косинусоїдного сигналів (9, 10) кореляційна функція будь-якого періодичного сигналу складається з косинусоїд з амплітудами  $\frac{A_n^2}{2}$  і частотами  $n\omega_1$ . Тільки в найпростішому випадку — чисті синусоїди або косинусоїди, таких косинусоїд лише одна.

Миттєва потужність періодичного сигналу, крім суми постійних складових і сигналів з кратними подвійними частотами, має ще додаткові складові (комбінаційні частоти), котрі визначаються сумою:

$$w_{\kappa}(t) = \frac{1}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_k A_m e^{j(k+m)\omega_1 t}.$$

Отже, спектр потужності періодичного сигналу, як і для розглянутого випадку двох синусоїдних сигналів, складається з постійної потужності та потужностей кожної подвійної частоти сигналу, а також потужностей комбінаційних частот. Спектр автокореляційної функції сигналу складається тільки з частотних складових вихідних сигналів і не враховує енергії комбінаційних частот та постійної складової. Тому площа під кривою спектра автокореляційної функції є середньою енергією випадкового процесу, котра в спектрі добутку сигналів є енергією постійної складової. Кожна частотна складова відповідає реактивній енергії сигналу на цій частоті. Але, як відзначалося раніше, реактивні енергії при підсумовуванні можуть збільшити активну складову.

Функція  $f(x) = x^2 p(x)$  назвемо енергетичним сигналом випадкового процесу, спектром якої є друга похідна спектру функції розподілу з зворотним знаком (1), не є ні кореляційною функцією, ні енергетичним сигналом [10]. Її можна вважати енергетичним сигналом, переходячи від миттєвого значення сигналу  $x$  до моменту часу  $t$  при умові, що вона є квадратом функції  $tp(t)$ . Така функція, виходячи з того, що функція розподілу  $p(x)$  є позитивною і в більшості випадків симетричною, часто є двогорбою.

Для прикладу знайдемо основні сигнали та спектри для розподілів Лапласа та Гауса. Виходячи з виразів цих розподілів [1],

$$p_L(x) = \frac{1}{2} e^{(-|x|)} \text{ та } p_G(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma}},$$

знайдемо функції  $f(t) = t^2 p(t)$  та  $\sqrt{f(t)}$  відповідно:

$$f_L(t) = \frac{t^2}{2} e^{(-|t|)}, \quad f_G(t) = \frac{t^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma}}, \quad \sqrt{f_L(t)} = \frac{t}{\sqrt{2}} e^{\left(-\frac{|t|}{2}\right)} \text{ та } \sqrt{f_G(t)} = \frac{te^{-\frac{t^2}{4\sigma^2}}}{\sqrt[4]{2\pi}\sqrt{\sigma}}. \quad (12)$$

Знаходячи перетворення Фур'є для (12) та підводячи їх у квадрат, отримає-

мо енергетичні спектри для цих функцій:

$$S_L(\omega) = \frac{256\omega^2}{\pi(1+4\omega^2)^4} \text{ та } S_G(\omega) = 4\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma^5\omega^2 e^{-2\omega^2\sigma^2} \quad (13)$$

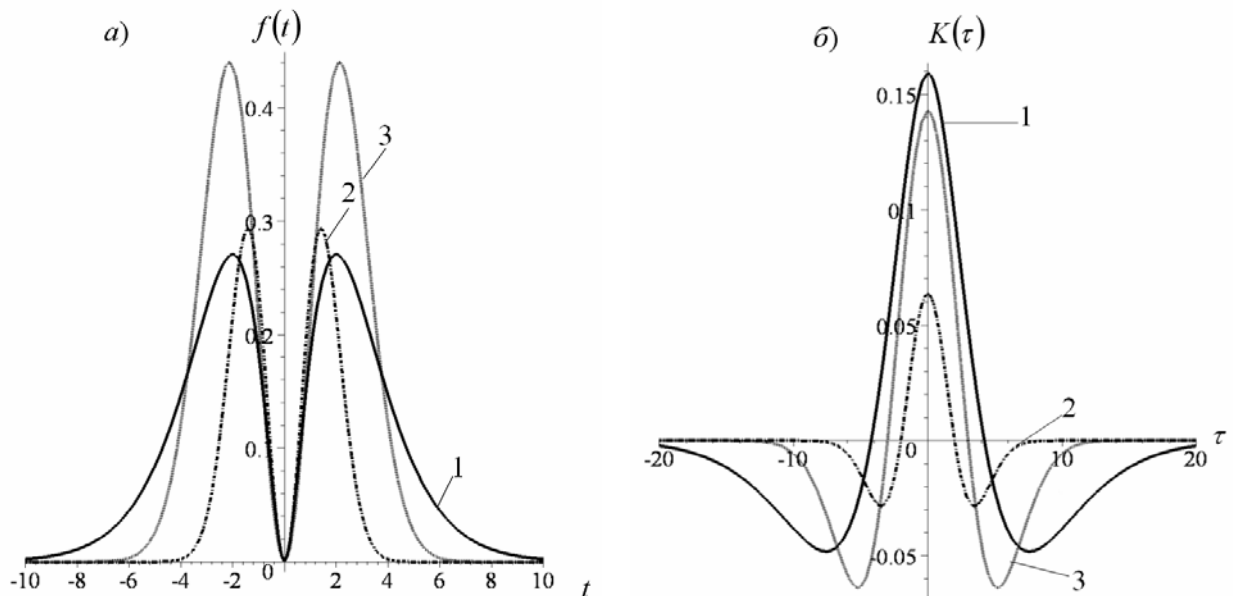
Зворотні перетворення Фур'є від (13) дають можливість отримати кореляційні функції для цих енергетичних спектрів:

$$K_L(\tau) = \frac{1}{24\pi} \left[ h(-\tau)e^{-\frac{\tau}{2}}(24+12\tau-\tau^3) + h(\tau)e^{\frac{\tau}{2}}(24-12\tau+\tau^3) \right], \quad (14)$$

де  $h(\tau)$  – одиничний стрибок (функція Хевісайда),

$$K_G(\tau) = \frac{\sqrt{2}\sigma^3(4\sigma^2 - \tau^2)}{8\sqrt{\pi}\sqrt[3]{\sigma^4}} e^{-\frac{\tau^2}{8\sigma^2}}. \quad (15)$$

На рис. 4, а приведені графіки функцій  $f(t)$  для функцій розподілу Лапласа та Гауса (12), а на рис. 4, б – кореляційні функції для цих розподілів (14, 15).

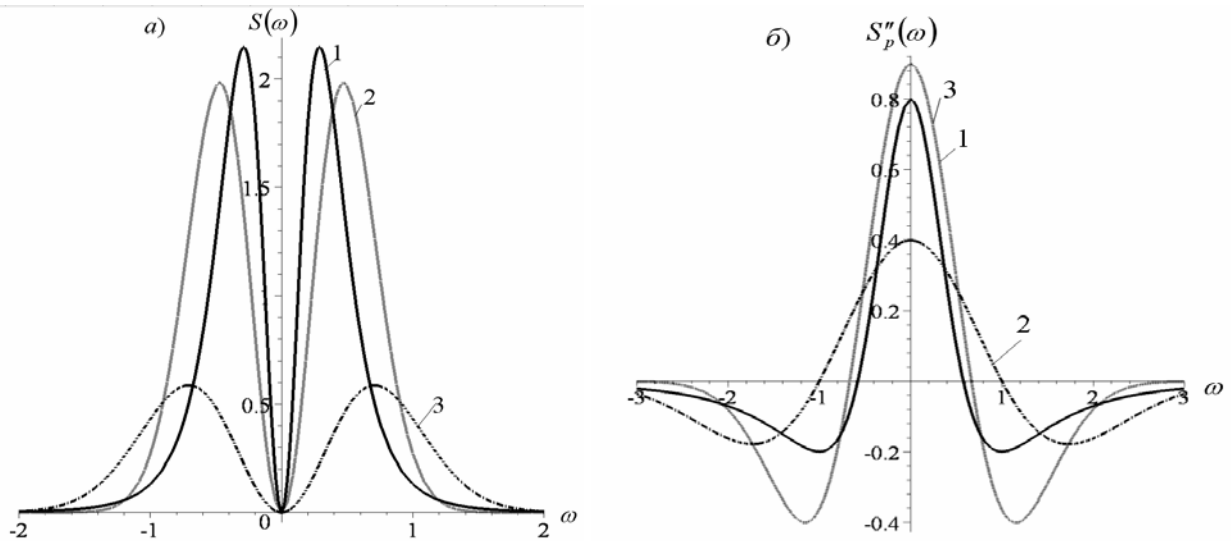


а – функції  $f(t)$ ; б – кореляційні функції

Рисунок 4 – Функції  $f(t) = t^2 p(t)$  та кореляційні функції для розподілу Лапласа (крива 1) та розподілу Гауса при  $\sigma = 1,5$  (крива 2) і  $\sigma = 1$  (крива 3)

На рис. 5 а приведені енергетичні спектри функцій (13) та на рис. 5 б – їх другі похідні СФР із зворотним знаком.

Як видно з рис. 5 а енергетичні спектри цих сигналів характеризуються тим, що мають нульову потужність постійної складової (при математичному сподіванні, котре дорівнює нулю) і є чисто активними, що відповідає висновкам, зробленим для періодичних енергетичних сигналів. Площа під кривою енергетичного спектра є середньою енергією випадкового сигналу.



а – енергетичні спектри; б – другі похідні СФР з зворотним знаком  
Рисунок 5 – Енергетичні спектри та другі похідні СФР з зворотним знаком розподілу Лапласа (крива 1) та розподілу Гауса при  $\sigma=1,5$  (крива 2) і  $\sigma=1$  (крива 3)

Друга похідна СФР з зворотним знаком відрізняється тим, що потужність постійної складової є середньою потужністю сигналу, а потужність кожної складової є реактивною, тобто описує ті реактивні складові, з яких складається енергетичний спектр енергетичного сигналу.

Отже, крім енергетичного спектра, котрий є спектром кореляційної функції і широко використовується в теорії випадкових процесів, існує ще один енергетичний спектр цього ж випадкового процесу, котрий є спектром функції  $t^2 p(t)$ , і який назвемо другим енергетичним спектром випадкового процесу (сигналу). Неоднозначність оцінки потужності або енергії випадкового сигналу виникає через труднощі, пов'язані з переходом до еквівалентного певному випадковому сигналу детермінованого сигналу, який можна аналізувати за допомогою математичних прийомів. Другий енергетичний спектр випадкового сигналу – друга похідна СФР з зворотним знаком є спектром миттєвої потужності еквівалентного детермінованого сигналу. Другий, як і перший, енергетичний спектр відображає потужність або енергію випадкового сигналу.

### Висновки

Активна потужність суми синусоїдних сигналів складається з потужності постійного сигналу і реактивних потужностей синусоїдних сигналів подвійних частот та їх комбінаційних частот. Активна потужність обов'язково включає в себе реактивну складову, котра може зменшувати або збільшувати активну потужність.

Активна потужність автокореляційної функції синусоїдального сигналу завжди дорівнює нулю. Активна потужність автокореляційної функції суми синусоїдних сигналів є сумою реактивних потужностей кожного з цих сигналів і збільшується при збільшенні кількості реактивних складових.

Спектр потужності періодичного сигналу складається з постійної потужності, потужностей подвійних частот сигналу та потужностей комбінаційних частот.

Спектр автокореляційної функції сигналу складається тільки з частотних складових вихідних сигналів і не враховує енергії комбінаційних частот та постійної складової. Кожна частотна складова відповідає реактивній енергії сигналу на цій частоті.

Випадковий сигнал має два енергетичні спектри – спектр автокореляційної функції і другий енергетичний спектр – другу похідну спектра функції розподілу із зворотним знаком, які доцільно надалі досліджувати для застосування у реальних пристроях.

#### **Література**

1. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: Советское радио, 1974. – 549 с.
2. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы (Часть 1). – М.: Советское радио, 1967. – 439 с.
3. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. – М.: Высшая школа, 1967. – 775 с.
4. Майстренко В.М. Спектри одномірних функцій розподілу випадкових процесів // Вісник НТУУ «КПІ». Серія приладобудування. – 2003. – Вип. 26. – С. 145 – 150.
5. Майстренко В.М. Дослідження спектрів одномірних функцій розподілу випадкових процесів // Третя науково-технічна конференція. Приладобудування – 2004: Стан і перспективи” 20 – 21 квітня 2004 р. м. Київ, Україна, Збірка наукових праць – С. 137 – 138.
6. Майстренко В.М. Дослідження спектрів одномірних функцій розподілу випадкових процесів // Вісник НТУУ «КПІ». Серія приладобудування. – 2004. – Вип. 27. – С. 163 – 170.
7. Майстренко В.М. Спектри двомірних функцій розподілу випадкових процесів// Вісник НТУУ «КПІ». Серія приладобудування. – 2005. – Вип. 29. – С. 160 – 168.
8. Атабеков Г.К. Линейные электрические цепи. – М.: Государственное издательство оборонной промышленности, 1957. – 174 с.
9. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. – М.: Наука, 1979. – 335 с.
10. Майстренко В.М. Енергетичний сигнал та його особливості // Методи та прилади контролю якості. – 2005. – №15. – С.23 – 27
11. Майстренко В.М. Зв’язок спектра функції розподілу стаціонарного випадкового процесу з енергетичним спектром // Вісник НТУУ «КПІ». Серія приладобудування. – 2005”. – Вип. 30. – С. 157 – 166.

<p>Майстренко В.Н. <b>Второй энергетический спектр эргодического случайного процесса</b> Рассмотрена структура энергетических спектров синусоидальных сигналов и их корреляционной функции, а также периодических и непериодических сигналов, которые состоят из отдельных синусоидальных сигналов, и случайных сигналов. Показано, что оценку энергетического спектра случайных сигналов можно проводить, считая, что он есть спектром корреляционной функции или спектром энергетического сигнала случайного процесса</p>	<p>Maystrenko V.N. <b>The second power spectrum of ergodicity casual process</b> The structure of power spectra of sine wave signals and their correlation function is considered, and also periodic and acyclic signals, which consist of separate sine wave signals, and casual signals. Is shown, that the estimation of a power spectrum of casual signals can be spent, considering, that he is by a spectrum of correlation function or spectrum of a power signal of casual process</p>
---	--

*Надійшло до редакції  
25 червня 2006 року*